

Modeliranje i prognoziranje prinosa odabranih europskih burzovnih indeksa

Čelan, Klara

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Economics and Business / Sveučilište u Zagrebu, Ekonomski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:148:868133>

Rights / Prava: [Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported/Imenovanje-Nekomercijalno-Dijeli pod istim uvjetima 3.0](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-15**



Repository / Repozitorij:

[REPEFZG - Digital Repository - Faculty of Economics & Business Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu

Ekonomski fakultet

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij

Poslovna ekonomija – smjer Analiza i poslovno planiranje

**MODELIRANJE I PROGNOZIRANJE PRINOSA ODABRANIH EUROPSKIH
BURZOVNIH INDEKSA**

Diplomski rad

Klara Čelan

Zagreb, lipanj 2024.

Sveučilište u Zagrebu

Ekonomski fakultet

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij

Poslovna ekonomija – smjer Analiza i poslovno planiranje

**MODELIRANJE I PROGNOZIRANJE PRINOSA ODABRANIH EUROPSKIH
BURZOVNIH INDEKSA**

**MODELING AND FORECASTING THE RETURNS OF SELECTED
EUROPEAN STOCK MARKET INDICES**

Diplomski rad

Student: Klara Čelan

JMBAG studenta: 0067598275

Mentor: doc. dr. sc. Ivana Lolić

Zagreb, lipanj 2024.

Sažetak

Razvoj financijske ekonometrije i prediktivne analitike omogućio je da se na financijskim tržištima koje karakterizira slabi oblik hipoteze o efikasnosti tržišta prognoziraju buduće cijene i prinosi s obzirom na zabilježene povijesne podatke. Predmet je ovog rada modeliranje i kratkoročno prognožiranje prinosa pet odabranih europskih dioničkih burzovnih indeksa (DAX, FTSE 100, CAC 40, IBEX 35, Euro Stoxx 50) korištenjem naivnih modela, modela jednostavnih pomičnih prosjeka, autoregresijskih modela i modela geometrijskog Brownovog gibanja s ciljem ocjene njihove prediktivne moći. Empirijska je analiza provedena na javno dostupnim podacima s platforme *Yahoo Finance* korištenjem programskog jezika *Python*. Inicijalna primjena modela dodatno je evaluirana dijeljenjem podataka na poduzorke za treniranje i testiranje modela. Grafička i kvantitativna komparativna analiza pomoću *RMSE* pokazatelja potvrđuju mogućnost uspješnog kratkoročnog prognožiranja dnevnih prinosa relevantnim modelima.

Ključne riječi: prognožiranje, naivni modeli, modeli jednostavnih pomičnih prosjeka, AR modeli, geometrijsko Brownovo gibanje, RMSE

Summary

The development of financial econometrics and predictive analytics has enabled forecasting future prices and returns based on historical data in financial markets that imply weak form of the efficient market hypothesis. This paper focuses on modeling and short-term forecasting returns of five selected European stock market indices (DAX, FTSE 100, CAC 40, IBEX 35, Euro Stoxx 50) using naïve models, simple moving average models, autoregressive models, and geometric Brownian motion in order to evaluate their predictive power. The empirical analysis was conducted using publicly available data from Yahoo Finance, utilizing Python programming language. The initial application of the models was further evaluated by splitting the data into training and testing subsets. Graphical and quantitative comparative analysis using the RMSE indicator confirms the possibility of successful short-term forecasting of daily returns by applying relevant models.

Key words: forecasting, naive models, simple moving average models, AR models, geometric Brownian motion, RMSE

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je diplomski rad / seminarski rad / prijava teme diplomskog rada isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu, a što pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem da nijedan dio rada / prijave teme nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz necitiranog izvora te da nijedan dio rada / prijave teme ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem, također, da nijedan dio rada / prijave teme nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

(vlastoručni potpis studenta)

(mjesto i datum)

STATEMENT ON THE ACADEMIC INTEGRITY

I hereby declare and confirm by my signature that the final thesis is the sole result of my own work based on my research and relies on the published literature, as shown in the listed notes and bibliography.

I declare that no part of the thesis has been written in an unauthorized manner, i.e., it is not transcribed from the non-cited work, and that no part of the thesis infringes any of the copyrights.

I also declare that no part of the thesis has been used for any other work in any other higher education, scientific or educational institution.

(personal signature of the student)

(place and date)

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Predmet i ciljevi istraživanja	1
1.2	Podatci i metode istraživanja.....	1
1.3	Očekivani stručni doprinos	2
1.4	Sadržaj i struktura diplomskog rada	2
2	Dionički burzovni indeksi	3
2.1	Formiranje dioničkih burzovnih indeksa	4
2.2	Upotreba dioničkih burzovnih indeksa u aplikativnim znanstvenim istraživanjima	7
2.3	Odabrani europski dionički burzovni indeksi	7
3	Teorijski okvir prognoziranja dinamike dioničkih burzovnih indeksa	10
3.1	Odabrani modeli za prognoziranje financijskih vremenskih serija.....	10
3.2	Indikatori kvalitete uspješnosti prognostičkih modela	15
3.3	Indikatori kvalitete uspješnosti uz dijeljenje podataka na poduzorke za treniranje i testiranje modela	17
4	Prognoziranje prinosa dioničkih indeksa odabranim prognostičkim modelima	18
4.1	Deskriptivna analiza odabranih dioničkih burzovnih indeksa	19
4.2	Dekompozicija i ispitivanje stacionarnosti vremenskog niza	24
4.3	Implementacija odabranih prognostičkih modela u programski jezik	29
5	Rezultati i komparativna analiza prognoziranja dioničkih burzovnih indeksa	32
5.1	Analiza prediktivne moći prognostičkih modela	32
5.2	Validacija prognostičkih modela uz dijeljenje podataka na poduzorak za treniranje modela i testiranje modela	36
5.3	Komparativna analiza prognostičkih modela pomoću kvantitativnih indikatora kvalitete uspješnosti	38
5.4	Implikacije rezultata analize za praktičnu primjenu i daljnja istraživanja	40
6	Zaključak.....	42
	Popis literature	44
	Popis slika	47
	Popis tablica	48
	Životopis	49

1 Uvod

1.1 Predmet i ciljevi istraživanja

Suvremena tržišta kapitala okupljaju sve veći broj sudionika kojima je cilj ostvariti optimalan odnos između nagrade i rizika. Za donošenje investicijske potrebno je provesti tehničku ili fundamentalnu analizu uobičajenim metodama, no razvoj financijske ekonometrije i prediktivne analitike otvorio je nove mogućnosti da se uslijed modeliranja prinosa i volatilnosti prognoziranjem ostvare iznadprosječni povrati. Naime, ukoliko se radi o efikasnim tržištima, promjene cijena i prinosa neće biti moguće predvidjeti, dok će u suprotnom u kratkom roku predviđanje biti moguće uzimajući u obzir povijesne podatke.

Kao relevantni odraz dinamike tržišta uobičajeno se koriste burzovni indeksi, a pri njihovom se prognoziранju može primijeniti širok spektar statističkih i financijskih modela. U toj liniji predmet je ovog rada modeliranje i kratkoročno prognoziранje prinosa burzovnih indeksa studijom slučaja na pet izabranih europskih indeksa s ciljem ocjene preciznosti prognostičkih modela.

U analizi su korišteni naivni modeli, modeli jednostavnih pomičnih prosjeka, autoregresijski modeli i geometrijsko Brownovo gibanje. Usporedbom stvarnih vrijednosti indeksa s prognostičkim vrijednostima sučeljene su performanse konvencionalnih modela s prediktivnom moći naprednijih financijskih modela. Uspješnost modela dodatno je evaluirana provođenjem analize nakon dijeljenja podataka na poduzorak za treniranje i testiranje modela.

1.2 Podatci i metode istraživanja

Empirijsko istraživanje provedeno je na javno dostupnim financijskim podacima preuzetima s *Yahoo Financea* o prilagođenim dnevnim zaključnim vrijednostima pet europskih burzovnih indeksa (DAX, FTSE 100, CAC 40, IBEX 35 i Euro Stoxx 50) za razdoblje 1.1.2010. - 31.12.2023. Izvorni podatci transformirani su u dnevne prinose koji su poslužili kao podloga za prognoziранje, a svi su izračuni provedeni korištenjem programskog jezika *Python* i programske potpore *Excel*.

U okviru istraživanja primijenjene su sljedeće metode: metoda analize, metoda sinteze, deskriptivna statistika, metoda komparacije, kao i različite ekonometrijske metode. Korištena

literatura obuhvaća knjige i stručne i znanstvene časopise iz područja investicijske analize, financijskih institucija i tržišta i analize vremenskih nizova i prognoziranja.

1.3 Očekivani stručni doprinos

Dublje razumijevanje efikasnosti različitih modela kratkoročnog prognoziranja doprinijet će uvidu u njihovu relativnu učinkovitost uz kritičko ispitivanje primjenjivosti na stvarne podatke. Očekuje se da će se posljedično očitovati i utjecaj makroekonomskih šokova na prognoziranje, a identificirat će se i smjernice za daljnja istraživanja. Navedeno će pružiti korisne naputke investitorima, financijskim analitičarima, bankarima, regulatornim tijelima i ostalim dionicima financijskih tržišta, a praktična primjena adekvatnih prognostičkih modela doprinijet će poboljšanju učinkovitosti i stabilnosti financijskih tržišta i potaknuti održivi razvoj u financijskom sektoru.

1.4 Sadržaj i struktura diplomskog rada

Rad je strukturiran u šest poglavlja. Prvo je poglavlje uvodno i u njemu se iznosi predmet i cilj rada, navode se izvori podataka i metode istraživanja, očekivani stručni doprinos te struktura i sadržaj.

Poglavlje koje slijedi odnosi se na dioničke burzovne indekse i prikazuje kako se formiraju, navodi konkretnu upotrebu u praktičnim znanstvenim istraživanjima i detaljniji opis odabranih europskih dioničkih burzovnih indeksa.

Treće poglavlje pruža teorijski okvir prognoziranja dinamike dioničkih burzovnih indeksa. Obuhvaća definiciju korištenih modela u prognoziranju i indikatora kvalitete njihove uspješnosti.

Četvrto i peto poglavlje odnose se na empirijski dio rada. Početna analiza vremenskih nizova u vidu deskriptivne analize, dekompozicije i ispitivanja stacionarnosti vremenskih nizova završava implementacijom prognostičkih modela u softver. Slijedi prikaz rezultata i komparativna analiza prognostičkih modela grafičkom usporedbom i kvantitativnim indikatorima, a potom dijeljenje podataka na poduzorak za treniranje modela i testiranje modela.

Rad završava zaključkom uz smjernice za daljnju praktičnu primjenu.

2 Dionički burzovni indeksi

Burzovni su indeksi pokazatelji koji se formiraju s namjerom mjerenja i ocjene kretanja tržišta kapitala, a razlikuju se obveznički i dionički indeksi. Dionički indeksi prate performanse određenog tržišnog segmenta ili tržišta u cjelini i prepoznati su kao vodeći barometri aktivnosti na tržištu. Kako obuhvaćaju različite dijelove tržišta kapitala, mogu biti globalni (npr. FTSE Global Total Cap), regionalni (npr. Euro Stoxx 50), državni (npr. DAX), sektorski (npr. Dow Jones Industrial Average) itd. Uz situaciju u makrookruženju, njihova promjena odražava kretanje cijena dionica koje ga čine i pripadajućih ostvarenih povrata. Izračunavaju se i dnevno objavljuju na financijskim portalima, internetskim stranicama svjetskih burzi, u financijskim časopisima i novinama, a upravo su visoke frekvencije povijesnih i ažurnih podataka atraktivne za ispitivanje mogućnosti anticipacije budućih događaja (Lolić, 2018).

Potencijalne su primjene dioničkih burzovnih indeksa koje ističu njegovu važnost sljedeće: procjena vrijednosti portfelja, *benchmark* prilikom ocjene rada portfelj menadžera, smjernice za donošenje investicijskih odluka, temelj za kreiranje i investiranje indeksnih fondova, *input* pri izračunu tržišnog rizika. U nastavku su detaljnije razloženi.

Tržišni indeks mjeri rast prosječnog portfelja jer evidentira povijesne povrate i rizik, a njihovo korištenje donosi uštedu novca i vremena potrebnog za konstruiranje portfelja prema individualnim preferencijama (Blažić, 1998).

Kretanje indeksa služi kao *benchmark* jer se uspješnost upravljanja portfelj menadžera evaluira usporedbom sa željenim portfeljem koji se može adekvatno zamijeniti različitim indeksima.

Prema osnovnim pravilima tehničke analize, indeksi uzimaju u obzir sve dostupne informacije čime signaliziraju stanje tržišta i upućuju investitore u donošenje odluke o kupnji, prodaji ili držanju vrijednosnog papira (Murphy, 2007).

Nadalje, investicijskim fondovima koji prate burzovne indekse cilj je replicirati performanse željenog indeksa ulažući u njegove sastavnice u otprilike istom omjeru u kojem su zastupljene na tržištu. Time se postiže niži trošak upravljanja, transparentna je investicijska strategija, a portfelj je diverzificiran.

Korištenjem indeksa može se izračunati intenzitet promjene prinosa na dionicu prema promjenama prinosa na indeks (beta koeficijent).

Prvi burzovni indeks koji se sastojao od zaključnih cijena jedanaest poduzeća objavio je Charles Dow 1884. godine (Dow Jones Railroad Average, danas Dow Jones Transportation Average). Dow je vjerovao da odražava ekonomsko stanje države i intencija je bila da praćenjem indeksa prepozna nastajanje većih rastućih i padajućih tržišta (Murphy, 2007). Desetak godina kasnije od dvanaest industrijskih kompanija sastavljen je Dow Jones Industrial Average. Razdoblje u kojem kreiranje i objava indeksa dobivaju na važnosti je vrijeme prosperiteta 1920-ih, „Roaring Twenties“, kada dnevne novine objavljuju financijske podatke. U Europi je uključivanje statistike praćenja tržišta svoj procvat dočekalo tek krajem 20. stoljeća. Danas su najpoznatiji svjetski burzovni indeksi S&P 500, Dow Jones Industrial Average, NASDAQ Composite, FTSE 100, Nikkei 225, DAX, CAC 40, a u Hrvatskoj to je CROBEX indeks.

2.1 Formiranje dioničkih burzovnih indeksa

Odabir metodologije izrade burzovnih indeksa ovisit će, između ostalog, o obuhvatu tržišta, frekvenciji objavljivanja podataka, vrsti cijena, uključenim vrijednosnim papirima i načinu ponderiranja (Hautcoeur, 2006). Navedeno implicira mnoge razlike u formiranju indeksa koje, kao rezultat različitih praksi, često onemogućuju međusobnu usporedbu ili replikaciju indeksa.

Kao primjer formiranja burzovnog indeksa koristit će se indeks u vlasništvu Zagrebačke burze, CROBEX, a sve sljedeće promjenjive karakteristike odnosit će se na datum 22. travnja 2024.

CROBEX je uveden u rujnu 1997., a bazna mu je vrijednost 1000,00 s baznim datumom 1.7.1997. Sastoji se od 21 dionice kojima se trgovalo više od 75 % ukupnog broja trgovinskih dana od ožujka 2024. Prilikom formiranja računa se rang pojedince dionice tako što se odredi udio u *free float* tržišnoj kapitalizaciji (50 %) i udio u prometu unutar knjige ponuda od posljednje revizije (50 %). U indeks se uvrštava 15-25 dionica uvrštenih na redovno tržište koje imaju najveći rang, a revizije indeksa provode se na polugodišnjoj osnovi, u ožujku i rujnu.

Indeks se računa prema sljedećoj formuli (prilagođeno prema Zagrebačka burza, 2020):

$$CROBEX_t = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t} \cdot q_{i,T} \cdot f_{i,T} \cdot w_{i,T}}{D_t}, \quad (1)$$

pri čemu je:

$p_{i,t}$ – zadnja cijena dionice i u trenutku izračuna indeksa t ,

$q_{i,T}$ – broj izdanih dionica i na datum revizije indeksa T ,

$f_{i,T}$ – faktor tržišne kapitalizacije u slobodnom prometu (eng. *free float* faktor),

$w_{i,T}$ – težinski faktor i

D_t – divizor indeksa.

Faktor tržišne kapitalizacije u slobodnom prometu odnosi se na udio dionica poduzeća koje su dostupne na tržištu i kojima se može slobodno trgovati. Za dionice kojima je *free float* manji od 20 %, faktor se određuje tako da se *free float* zaokruži na prvi sljedeći cijeli broj. U suprotnom, *free float* zaokružiti će se na prvi veći višekratnik broja pet. Kako ne bi prešao 10 %, primjenjuje se težinski faktor. On iznosi jedan za dionice čiji je udio u ukupnoj *free float* tržišnoj kapitalizaciji manji ili jednak 10 %, a manji je od jedan za preostale dionice. Divizor indeksa računa se kako bi se indeksi mogli usporediti tijekom vremena unatoč uključivanju i isključivanju dionica iz indeksa, promjenama *free float* faktora i/ili promjenama broja izdanih dionica iz njegovog sastava (Bahovec i sur., 2016). Iznos divizora može se iščitati na službenim stranicama Zagrebačke burze, a njegova je trenutna vrijednost 1.103.609,5171.

Tablica 1 prikazuje sastav dionica CROBEX-a na dan 22. travnja 2024. Prvi stupac odnosi se na simbol dodijeljen pojedinom poduzeću, čiji se puni naziv nalazi u drugom stupcu. Sljedeći stupci sadrže *inpute* za izračun indeksa.

Uvrštavanjem traženih veličina u formulu (1) dobiva se vrijednost indeksa na dan 22. travnja

$$2024.: CROBEX_{22.4.2024.} = \frac{3.093.881.698,94}{1.103.609,5171} = 2.803,42.$$

Tablica 1 Sastav i izračun CROBEX-a na dan 22.4.2024.

Simbol	Izdavatelj (i)	Broj dionica (q _i)	Free float faktor (f _i)	Težinski faktor (w _i)	Zadnja cijena (p _i)	Težina (%)	p _i ·q _i ·f _i ·w _i
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
ADPL	AD PLASTIK d.d.	4.199.584	0,7	1,00	13	1,24	38.216.214,40
ADRS2	ADRIS GRUPA d.d.	6.784.100	0,95	0,76	62	9,83	304.065.318,36
ARNT	Arena Hospitality Group d.d.	5.128.721	0,5	1,00	32,8	2,72	84.111.024,40
ATGR	ATLANTIC GRUPA d.d.	13.337.200	0,45	0,91	57	10,05	311.056.142,53
ATPL	ATLANTSKA PLOVIDBA d.d.	2.093.270	0,3	1,00	44,3	0,90	27.819.558,30
CKML	Čakovečki mlinovi d.d.	10.290.000	0,8	1,00	10,3	2,74	84.789.600,00
DLKV	Dalekovod d.d.	41.247.193	0,25	1,00	2,4	0,80	24.748.315,80
ERNT	ERICSSON NIKOLA TESLA d.d.	1.331.650	0,55	1,00	207	4,90	151.608.352,50
HPB	HPB d.d.	2.024.625	0,3	1,00	220	4,32	133.625.250,00
HT	HT d.d.	78.000.000	0,4	0,35	30,6	10,68	330.372.015,29
INGR	INGRA d.d.	13.545.200	0,95	1,00	2,32	0,96	29.853.620,80
KODT	KONCAR - DISTRIBUTIVNI I SPECIJALNI TRANSFORMATORI d.d.	388.376	0,3	1,00	1.450,00	5,46	168.943.560,00
KOEI	KONCAR d.d.	2.572.119	1	0,47	258	10,17	314.782.960,59
MAIS	MAISTRA d.d.	10.944.339	0,11	1,00	45,2	1,76	54.415.253,51
PLAG	PLAVA LAGUNA d.d.	2.197.772	0,16	1,00	372	4,23	130.811.389,44
PODR	PODRAVKA d.d.	7.120.003	0,8	0,33	157	9,52	294.514.236,34
RIVP	Valamar Riviera d.d.	126.027.542	0,55	0,92	5,2	10,67	329.965.715,79
SPAN	SPAN d.d.	1.960.000	0,55	1,00	43,7	1,52	47.108.600,00
ULPL	ALPHA ADRIATIC d.d.	580.000	0,85	1,00	17	0,27	8.381.000,00
VLEN	BRODOGRADILISTE VIKTOR LENAC d.d.	16.813.247	0,14	1,00	3,76	0,29	8.850.493,22
ZABA	Zagrebacka banka d.d.	320.241.955	0,04	1,00	16,85	6,98	215.843.077,67
UKUPNO						100	3.093.881.698,94
CROBEX na dan 22.4.2024.							2.803,42

izvor: izračun autora prema podacima sa službenih stranica ZSE (2024)

2.2 Upotreba dioničkih burzovnih indeksa u aplikativnim znanstvenim istraživanjima
Mnogo je empirijskih istraživanja koja u podlozi koriste dioničke burzovne indekse primjenjujući širok spektar metoda i pristupa analizi s različitom svrhom, a u nastavku su spomenuta najcitiranija i najnovija među njima.

Najpoznatiji modeli procjenjivanja kapitalne imovine (Fama i French, 1992, 1993, 2004) i tržišne efikasnosti (Thaler, 1987, Fama, 1998) koriste indekse prilikom aproksimacije povrata tržišnog portfolija, izračuna beta koeficijenta i identifikacije tržišnih anomalija. Poticaj razvoju internacionalne diverzifikacije portfelja pružio je Solnik (1974) dokazujući redukciju rizika, dok je Carhart (1997) primijenio indekse kao *benchmark* kod mjerenja povrata uzajamnih fondova. Shiller (1981) ispituje u kojoj mjeri cijene dionica odražavaju isplate dividendi, a prilikom analize volatilnosti cijene koristi upravo burzovne indekse. Shleifer i Vishny (1997) temeljem burzovnih indeksa uspoređuju performanse tržišta i sektora u ovisnosti o upravljačkim strukturama u poduzeću.

Korelaciju makroekonomskih indikatora i tržišnih indeksa opisuju Chen, Roll i Ross (1986), Engle i Rangel (2008) te Rapach, Strauss i Zhou (2010) multifaktorskim, GARCH i prediktivnim modelima. Caporale, Gil-Alana i Melnicenco (2024) kointegracijskim metodama analiziraju dugoročnu vezu između tržišnih indeksa i kamatnih stopa u SAD-u i Europi. Ispoljavanje makroekonomskih šokova na tržište kapitala u vidu financijskih kriza i političkih previranja proučavali su Kaminsky i Reinhart (1999), kao i Beaulieu, Cosset i Essaddam (2005). Nadalje, Baker i Wurgler (2006) i Tetlock (2007) istražuju kako su sentiment investitora i medija determinirali povrate dionica i kretanje njihovih cijena koristeći indekse u metrikama.

Navedena znanstvena istraživanja ilustriraju širok spektar primjene burzovnih indeksa, od analize tržišne efikasnosti i procjene volatilnosti i rizika, do evaluacije makroekonomskih faktora i sentimenta, čime pružaju vrijedne informacije investitorima, analitičarima i kreatorima politika.

2.3 Odabrani europski dionički burzovni indeksi

Neka od novijih istraživanja etabliranih financijskih institucija apostrofiraju da atraktivnost europskog tržišta kapitala raste u odnosu na američko zbog nekoliko ključnih čimbenika među kojima se ističu: podcijenjenost dionica, potencijal rasta i inovacije, stabilnost vanjskog okruženja, više kamatne stope i održivost poslovnih praksi (Wealth Management, 2023, J. P.

Morgan, 2023). Imajući to u vidu, odabrano je pet burzovnih indeksa koji pokrivaju njemačko (DAX), englesko (FTSE 100), francusko (CAC 40), španjolsko (IBEX 35) tržište kapitala i eurozonu u cjelini (Euro Stoxx 50).

DAX ili *Deutsche Aktien Index* dionički je indeks koji predstavlja 40 najvećih i najlikvidnijih njemačkih *blue chip* poduzeća koja su izlistana na Frankfurtskoj burzi. Formira se ponderiranjem cijena odabranih kotiranih poduzeća prema njihovoj *free float* tržišnoj kapitalizaciji. U vlasništvu je *Deutsche Börse*, a cijene potrebne za izračun indeksa prikupljaju se neprekidno putem trgovačkog sustava Xetra. Izračun i objava indeksa pokrenuti su 1987. godine, a danas sastav DAX-a obuhvaća otprilike 80 % agregatne tržišne kapitalizacije kojom se trguje na Frankfurtskoj burzi (Županac, 2021). Uključuje globalno prepoznatljive korporacije kao što su Adidas, Allianz, BMW, *e.on*, Henkel, Merck, Metro, SAP, Siemens, Volkswagen Group, Zalando i druge.

FTSE 100 (*Financial Times Stock Exchange*) obuhvaća 100 najvrjednijih *blue chip* kompanija koje kotiraju na *London Stock Exchangeu* ponderiranih s obzirom na njihovu tržišnu kapitalizaciju. Ujedno se radi o najlikvidnijim dionicama, stoga trgovanje njima podrazumijeva većinu ukupnog prometa burze. Prati se od siječnja 1984., a održava ga *London Stock Exchange Group*. Izračunava se u realnom vremenu, svakih 15 sekundi, dok se revizije provode na kvartalnoj razini. Na globalnoj je razini prepoznat kao indikator stanja britanske ekonomije i općenito situacije na burzama. Trenutno najveću težinu u indeksu imaju sljedeća poduzeća: AstraZeneca, Shell, HSBC, Unilever i BP (Investopedia, 2023).

U indeks CAC 40 (*Cotation Assistée en Continu*) uključeno je 40 najznačajnijih poduzeća *Euronext Paris*, međunarodne europske burze nastale 2000. spajanjem pariške, amsterdamske i briselske burze. Sam indeks uveden je 1987. prvotno koristeći ukupnu tržišnu kapitalizaciju, no kasnije mijenja metodologiju prilagođenu *free float* tržišnoj kapitalizaciji. Izračun i objava odvijaju se u realnom vremenu, a revizije su kvartalne. Među europskim je indeksima specifičan jer, premda su sjedišta poduzeća u Francuskoj, gotovo 45 % njihovih dionica u vlasništvu je stranih ulagača – njemačkih, japanskih, američkih i britanskih investitora (Županac, 2021). Glavni je uzrok tome zapošljavanje značajnog udjela radne snage izvan Francuske i iznimno visoki prihodi ostvareni u inozemstvu korporacija kao što su LVMH, Airbus, L'Oréal, Renault, Michelin i dr.

Učinak najlikvidnijih 35 dionica burze *Bolsa de Madrid* odražava se u vrijednosti IBEX 35 indeksa (*Índice Bursátil Español*), formiranog ponderiranjem prema tržišnoj kapitalizaciji. Javnosti je predstavljen 1992. godine, a danas je ključni pokazatelj španjolskog tržišta kapitala koji u realnom vremenu izračunava i održava *Sociedad de Bolsas*, operativna jedinica čija je funkcija upravljanje španjolskim burzama. Neke od međunarodno priznatih kompanija uključenih u sastav indeksa su Santander, Telefónica, Inditex, Iberdrola i Repsol.

Vodeći indeks *blue-chip* poduzeća eurozone, Euro Stoxx 50, izveden je na temelju Euro Stoxx indeksa s obzirom na performanse najvećih poduzeća u terminima tržišne kapitalizacije. Sadrži 50 sastavnica iz Francuske (41 %), Njemačke (26,5 %), Nizozemske (12,7 %), Španjolske, Italije, Irske, Finske i Belgije (< 10 %). Navedene kompanije pokrivaju različite sektore, od tehnologije i prerađivačke industrije, do farmacije i financijske industrije. Koristi metodologiju *free float* tržišne kapitalizacije, izračunava se u realnom vremenu, a revizije se provode jednom godišnje (Euro Stoxx 50 Factsheet, 2023). Specifičnost ovog indeksa njegova je međunarodna privlačnost. Sadrži mnoge komponente ranije navedenih indeksa među kojima se ističu Siemens, SAP, LVMH, TotalEnergies i Allianz.

Odabrani indeksi predstavljaju najveća i najutjecajnija europska tržišta, stoga se njihovom analizom dobiva realan uvid u performanse europskih gospodarskih velesila i utjecaj na globalnu ekonomiju, otvaraju se mogućnosti međusobne komparacije, kao i identifikacije trendova i anomalija.

3 Teorijski okvir prognoziranja dinamike dioničkih burzovnih indeksa

Poglavlje koje slijedi pripremljeno je prema: Makridakis i sur. (1998), Chatfield (2004), Montgomery, Jennings i Kulahci (2008), Hanke i Wichern (2009), Bahovec i Erjavec (2009), Dumičić i sur. (2011), Reddy i Clinton (2016), Wooldridge (2016), (Čižmešija i Sorić, 2016), Groebner, Shannon i Fry (2018), Islam i Nguyen (2020), Toby i Agbam (2021).

Prognoziranje podrazumijeva proces predviđanja budućeg događaja koje nailazi na značajnu primjenu u poslovnoj ekonomiji, primjerice u vidu operacijskog menadžmenta, kontroli proizvodnog procesa, marketinga, poslovnih financija, makroekonomije i demografije. Sastoji se od sljedećih koraka: definicija problema, prikupljanje podataka, analiza podataka, odabir modela i vrednovanje, validacija modela i ispitivanje izvedbe modela. Pri prognoziranju u užem smislu koriste se kvalitativne i kvantitativne metode, ovisno o frekvenciji dostupnih podataka i subjektu koji provodi prognoziranje. Kvalitativne metode svojstvene su stručnjacima, kao što je na primjer Delfi metoda. S druge strane, kvantitativne metode koje će se koristiti u empirijskom istraživanju podrazumijevaju upotrebu povijesnih podataka i aplikaciju statističkih modela.

Podatci o ekonomskim pojavama najčešće su prikupljeni u obliku vremenskih nizova, pa tako i cijene dionica, odnosno burzovni indeksi. Radi se o skupu kronološki uređenih vrijednosti $y_t, t = 1, 2, \dots, n$, pri čemu n predstavlja duljinu niza. Analiza se može provoditi ukoliko su frekvencije niza međusobno usporedive. Podatci o dnevnim prinosima burzovnih indeksa korišteni u empirijskom istraživanju smatraju se konzistentnim i trenutačnim nizom jer su njegove frekvencije usporedive, ali nema smisla zbrajati ih, a budući da su na izvornom nizu provedene brojčane operacije, nazivaju se također izvedenim nizovima.

3.1 Odabrani modeli za prognoziranje financijskih vremenskih serija

Odabir modela ovisi o ciljevima primjene prognoziranja, prirodi pojave (makroekonomska ili mikroekonomska), sistematskim komponentama niza, dostupnim podacima, programskoj potpori i sličnim uvjetima.

Odabrani su često korišteni prognostički modeli za prognoziranje visokofrekventnih vremenskih nizova poput naivnih modela, modela jednostavnih pomičnih prosjeka i autoregresijskih modela, a dodatno je promatrano i geometrijsko Brownovo gibanje kao primjer složenijeg matematičkog modela.

Naivni modeli

Naivni prognostički modeli osnovni su statistički prognostički modeli za kratkoročno prognoziranje. Prema njima vremenski najrecentniji podatci bit će ključni u prognoziranju budućeg kretanja niza. U praksi se koriste za usporedbu efikasnosti naprednijih prognostičkih modela. U njih se ubrajaju naivni model I (*status quo*), naivni model II (*status quo* diferencije) i naivni model IIa (*status quo stope*, nije korišten u analizi jer niz ne sadrži eksponencijalni rast).

Naivni model I (*status quo*) koristi se u slučaju kada niz očituje isključivo slučajnu komponentu, a prognostička vrijednost za razdoblje nakon tekućeg računa se sljedećom formulom:

$$F_{t+1} = y_t. \quad (2)$$

Ako je τ prognostički horizont, prognostička vrijednost za τ razdoblja nakon tekućeg računa se kao:

$$F_{t+\tau} = y_t. \quad (3)$$

Srodan model prikladan za prognoziranje pojava s linearnim trendom jest naivni model II (*status quo* diferencije). Naime, kada se pri ispitivanju razvoja pojave u vremenu ustanovi da su prve diferencije empirijskih frekvencija približno jednake, zaključuje se da pojava slijedi pozitivan ili negativan linearni trend. Izračun prognostičke vrijednosti za jedno razdoblje nakon tekućeg vrši se prema izrazu:

$$F_{t+1} = y_t + (y_t - y_{t-1}), \quad (4)$$

dok se za izračun prognostičke vrijednosti za τ razdoblja nakon tekućeg koristi:

$$F_{t+\tau} = y_t + \tau(y_t - y_{t-1}). \quad (5)$$

Premda promatrani nizovi ne očituju trend komponentu kako će se kasnije detaljnije obrazložiti, korištenje modela *status quo* diferencije poslužit će kao referentna točka za usporedbu sa složenijim modelima, a i kao ilustracija pogrešnog modeliranja. Naime, ako se inicijalno ne provede raščlamba vremenskog niza na slučajnu komponentu i sistematske komponente, zbog čega se odabere neadekvatan model, prognoziranje može rezultirati velikim prognostičkim pogreškama.

Modeli izgladivanja – prognostički modeli temeljeni na pomičnim prosjecima

Jednostavni pomični prosjeci (eng. *moving averages*, $MA(k)$, *simple moving averages*, $SMA(k)$) izabrani su između modela izgladivanja kao metoda kontinuiranog prognoziranja pojava bez sistematskih komponenti jer daju bolje rezultate od prognoziranja jednostavnom aritmetičkom sredinom. Koriste se pri procjeni trenda, analizi sezonskih oscilacija, a pojavni su model linearnih stohastičkih procesa ($MA(q)$ i $ARIMA(0,0,q)$ model). Prognozira se računanjem aritmetičke sredine k uzastopnih empirijskih vrijednosti početnog niza s jednakim ponderom, pri čemu se za svako sljedeće razdoblje izuzima najstarija vrijednost i pridodaje najnovija. Može se zapisati na sljedeći način:

$$F_{t+1} = \frac{y_t + y_{t-1} + \dots + y_{t-k+1}}{k}, \quad (6)$$

pri čemu je k broj članova pomičnog prosjeka. Prirodom modela onemogućeno je izračunati prvih k prognostičkih vrijednosti.

Prognostička vrijednost za τ razdoblja nakon tekućeg računa se kao:

$$F_{t+\tau} = \frac{y_t + y_{t-1} + \dots + y_{t-k+1}}{k}. \quad (7)$$

Usprkos tome što će to uvelike utjecati na izgladenost izvedenog niza, nema striktno definirane metode izbora broja članova pomičnih prosjeka (k), stoga se uobičajeno koristi neki pokazatelj prosječne pogreške. Dva krajnja slučaja kada je $k = 1$ i $k = n$ izjednačavaju ovaj model s naivnim modelom I i jednostavnom aritmetičkom sredinom. Načelno će veći k značiti veću izgladenost inicijalnog niza i rezultat će prognozama koje se značajno ne razlikuju.

U empirijskom dijelu rada primijenjene su metode dvočlanog, tročlanog, četveročlanog, deseteročlanog, pedeseteročlanog, stočlanog, petstočlanog i tisućučlanog pomičnog prosjeka ($MA(2)$, $MA(3)$, $MA(4)$, $MA(10)$, $MA(50)$, $MA(100)$, $MA(500)$, $MA(1000)$) s namjerom ilustracije promjene broja članova na rezultat prognoze, što je moguće s obzirom na visoke frekvencije odabranih podataka.

Autoregresijski model, AR(p)

Modeli kojima se objašnjava stohastički proces koji generira pojavu nazivaju se linearni stohastički modeli. Najvažniji su među njima model čistog slučajnog procesa, autoregresijski model, model pomičnih prosjeka i mješoviti model koji objedinjuje autoregresijski model i pomične prosjeke.

Autoregresijski model, AR(p), izdvaja se kao relativno jednostavan za implementaciju, efikasno zapaža linearnu ovisnost u podacima, a parametri pružaju uvid u način na koji se povijesni podatci ogledaju u prirodi budućih vrijednosti. Autoregresijski model reda p može se izraziti kao:

$$Y_t = \theta_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (8)$$

pri čemu je:

Y_t – član procesa u razdoblju t ,

Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p} – članovi procesa u p prethodnih razdoblja,

θ_0 – konstantni član,

ϕ_1, \dots, ϕ_p – autoregresijski parametri i

ε_t – slučajna varijabla.

Za red autoregresijskog modela p uobičajeno je koristiti engleski naziv *lag*.

U praksi se konstantni član zanemaruje, a ukoliko se uvede oznaka B kao operatora pomaka, $BZ_t = Z_{t-1}$; $B^2 Z_t = B(BZ_t) = BZ_{t-1} = Z_{t-2}$; ...; $B^p Z_t = Z_{t-p}$, opći je oblik modela:

$$\phi(B)Z_t = \varepsilon_t. \quad (9)$$

Prilikom prognoziranja budućih vrijednosti za τ razdoblja nakon tekućeg koriste se procijenjeni koeficijenti i najrecentniji članovi niza:

$$Y_{t+\tau} = \phi_1 Y_{t+\tau-1} + \phi_2 Y_{t+\tau-2} + \dots + \phi_\tau Y_t + \phi_{\tau+1} Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p+\tau}. \quad (10)$$

U izrazu je vidljivo da će se u budućim prognozama koristiti prognostičke vrijednosti iz prethodnih koraka.

Procjena parametara najčešće se provodi primjenom metode najmanjih kvadrata ili maksimizacijom vjerodostojnosti. Jedan je od ključnih dijelova analize odabir broja

prethodnih članova procesa na koje se regresira Y_t , pri čemu se mogu koristiti Akaike informacijski kriterij (AIC), Schwarzov kriterij (BIC), no uobičajeno je za modeliranje kratkoročnih fluktuacija na financijskim tržištima koristiti manji broj, od 1 do 5. Navedeno se može potkrijepiti efikasnošću suvremenih financijskih tržišta na kojima stariji podatci brzo postanu irelevantni.

Stohastičko modeliranje - geometrijsko Brownovo gibanje

Svi dosada spomenuti modeli koristili su povijesne podatke za predviđanje budućeg kretanja pojave, odnosno radilo se o statističkim tehnikama. S druge strane, suvremena prediktivna analitika koristi *soft computing techniques* (Lolić, Matošec i Sorić, 2024) kao što su umjetne neuronske mreže ili pak stohastičko modeliranje koje uključuje geometrijsko Brownovo gibanje.

U pozadini te metode nalazi se ideja da cijene financijskih instrumenata sadrže nepredvidivu, slučajnu komponentu, koja se u stvarnosti očituje kao neizvjesnost. Radi se o matematičkom modelu primarno opaženom u okviru prirodnih znanosti još u 19. stoljeću koji formalni okvir duguje Einsteinu i Wieneru, a u aspektu financijskih tržišta primijenio ga je Louis Bachelier inovativno opisujući fluktuacije cijena na burzama. Poentirao je da bi u kratkom roku male promjene u cijeni trebale biti neovisne o trenutnoj cijeni i povijesnim cijenama, a u kombinaciji s centralnim graničnim teoremom zaključuje da su povrati neovisni i normalno distribuirani.

Geometrijsko Brownovo gibanje sastoji se dakle od dviju komponenti: konstantne i slučajne komponente. Konstanta obuhvaća prosječni povrat povrat (*drift*) tijekom određenog vremena, dok slučajna komponenta umnožak standardne devijacije prinosa (volatilnost tijekom određenog vremena) i slučajnog elementa, odnosno slučajni broj generiran iz jedinične normalne distribucije:

$$\pi_t = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon_t\Delta t, \quad (11)$$

pri čemu je:

π_t – prinos u vremenu t ,

μ – prosječan prinos u odabranom razdoblju,

Δt – broj razdoblja,

σ – standardna devijacija prinosa u odabranom razdoblju i

ε_t – slučajni broj generiran iz jedinične normalne distribucije u vremenu t .

Koristeći navedenu formulu moguće je generirati prinose s obzirom na izračunat prosječni prinos pojave i odstupanje od prinosa u odabranom razdoblju. Moguće su mnoge modifikacije jednadžbe u vidu računanja pomoću kliznih prosjeka i/ili standardnih devijacija, broja generiranih simulacija i slično.

U empirijskom dijelu istraživanja generirat će se prinosi korištenjem Monte Carlo simulacija, po 1000 π_t za svaki dan trgovanja, dok će prognostička vrijednost biti jednaka prosjeku simulacija. Na isti način provest će se prognoziranje vrijednosti za τ razdoblja nakon tekućeg.

3.2 Indikatori kvalitete uspješnosti prognostičkih modela

Točnost prognostičkih vrijednosti ispitat će se primarno grafičkim metodama – linijskim dijagramima i dijagramima rasipanja. Linijski će dijagrami prikazivati originalne nizove i prognozirane nizove uz vrijeme na apscisi, a prinos na ordinati. Dijagram rasipanja na horizontalnoj osi ima mjerilo za stvarne vrijednosti pojave, a na vertikalnoj za prognostičke. Simetrala prvog i trećeg kvadranta (pravac s formulom $y = x$) označavat će liniju savršene prognoze. Brojnost točaka na pravcu ili vrlo blizu uz pravac aludirat će na veću uspješnost prognostičkog modela. Točke iznad pravca označavaju situaciju precjenjivanja stvarnih vrijednosti ($y_t < F_t$), a točke ispod pravca podcijenjene stvarne vrijednosti ($y_t > F_t$).

Kvantitativne mjere točnosti prognoze svoj temelj imaju u izračunu razlike stvarne i prognostičke vrijednosti, odnosno u vrijednosti prognostičke pogreške:

$$e_t = y_t - F_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (12)$$

pri čemu vrijedi:

e_t – prognostička pogreška u vremenu t ,

y_t – stvarna vrijednost niza u vremenu t ,

F_t – prognostička vrijednost niza u vremenu t i

T – broj pojedinačnih prognostičkih pogrešaka (broj parova stvarnih i prognostičkih vrijednosti).

Međutim, kako bi se međusobno mogle uspoređivati pojave mjerene u različitim mjernim jedinicama koristi se relativna ili postotna prognostička pogreška, PE_t :

$$PE_t = \left(\frac{y_t - F_t}{y_t} \right) \cdot 100. \quad (13)$$

Standardne statističke mjere obuhvaćaju sljedeće:

- 1) *ME* (eng. *Mean Error*) – prosječna prognostička pogreška,

$$ME = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t, \quad (14)$$

- 2) *MAE* (eng. *Mean Absolute Error*) – prosječna apsolutna prognostička pogreška,

$$ME = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |e_t|, \quad (15)$$

- 3) *MSE* (eng. *Mean Squared Error*) – srednjekvadratna prognostička pogreška,

$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2, \quad (16)$$

- 4) *RMSE* (eng. *Root Mean Squared Error*) – korijen srednjekvadratne prognostičke pogreške,

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2}, \quad (17)$$

- 5) *MPE* (eng. *Mean Percentage Error*) – relativna postotna pogreška,

$$MPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T PE_t, \quad (18)$$

- 6) *MAPE* (eng. *Mean Absolute Percentage Error*) – prosječna apsolutna postotna pogreška,

$$MAPE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |PE_t|. \quad (19)$$

Među navedenim mjerama nepovoljne su prosječna prognostička pogreška (*ME*) i relativna postotna pogreška (*MPE*) jer je stvarna vrijednost modelom ponekad precijenjena, a ponekad podcijenjena, odnosno prognostičke pogreške poprimaju različite predznake. Računanjem njihove aritmetičke sredine poništavaju se pozitivna i negativna odstupanja, stoga rezultat može ispasti malen unatoč zabilježenim velikim odstupanjima.

Prosječna apsolutna pogreška (*MAE*) bolja je mjera jer u izračunu koristi apsolutni iznos pogreške. Ipak, s obzirom da svakoj pogrešci daje jednak ponder, nije osjetljiva na izdvojenice. Nadalje, srednjekvadratna prognostička pogreška (*MSE*) se kao prosjek kvadratnih odstupanja

najčešće koristi u paru sa svojim korijenom, $RMSE$. Radi se o pokazatelju koji se preferira u praksi, između ostalog zato što uslijed kvadriranja penalizira netipične vrijednosti.

Konačno, među najvažnije mjere točnosti ubraja se prosječna apsolutna postotna pogreška ($MAPE$) jer objašnjava razine pogreške u relativnom iznosu, no računa se samo za slučaj strogo pozitivne vrijednosti promatrane varijable.

Iz svega navedenog izvodi se zaključak da će se prilikom usporedbe prognostičkih modela kao optimalan indikator koristiti srednjekvadratna prognostička pogreška (MSE), odnosno njezin korijen ($RMSE$).

3.3 Indikatori kvalitete uspješnosti uz dijeljenje podataka na poduzorke za treniranje i testiranje modela

Model koji najbolje opisuje povijesne podatke neće nužno najbolje predviđati nove podatke u zadanom prognostičkom horizontu. Naime, modeli koji gotovo savršeno opisuju početne podatke mogu imati značajke *overfittinga* – prenaučeni su prema uzorku, drugim riječima, uključuju prevelik broj parametara koji služe isključivo boljem opisivanju povijesnih podataka. Sukladno tome, potrebno je model testirati na podacima koji su bili izuzeti iz početnog uzorka na koji je apliciran model, a potom odabrati onaj koji će imati najmanju pogrešku na njima. Uobičajeno je pritom podijeliti podatke na poduzorke na treniranje i testiranje modela.

Kako bi se ocijenila uspješnost modela na povijesnim podacima, tj. na poduzorku za treniranje, koriste se sljedeći indikatori: prosječna kvadratna pogreška reziduala (s^2), koeficijent determinacije (R^2), korigirani koeficijent determinacije (\bar{R}^2), Akaike i Schwarzov kriterij (koriste vjerodostojnost, L). Ipak, budući da odabrani prognostički modeli pretežno ne sadrže eksplicirane parametre kao što je slučaj kod regresijskih modela, izostavit će se prilikom ocjenjivanja uspješnosti modela na poduzorku za treniranje.

Tako će se prediktivna moć modela ocijeniti vizualnim tehnikama i računanjem korijena srednjekvadratne prognostičke pogreške ($RMSE$) na obama poduzorcima.

4 Prognoziranje prinosa dioničkih indeksa odabranim prognostičkim modelima
Istraživanje je provedeno na javno dostupnim financijski podacima preuzetima s *Yahoo Financea* o prilagođenim dnevnim zaključnim vrijednostima pet europskih burzovnih indeksa (DAX, FTSE 100, CAC 40, IBEX 35 i Euro Stoxx 50) za razdoblje 1.1.2010. - 31.12.2023. Navedeni period obuhvaća godine recesije, stabilnosti i ekspanzije u europskim gospodarstvima, što omogućava identifikaciju prognostičkog modela koji je pokazao najbolje rezultate u visoko kompleksnom okruženju.

Ostvareni dnevni prinosi indeksa izračunati su prema sljedećoj formuli (Orsag, 2015):

$$R_t = \frac{D_t + P_t}{P_0} - 1, \quad (20)$$

pri čemu je

R_t – ukupan dnevni prinos za razdoblje t ,

D_t – tekući novčani dohodak za razdoblje t ,

P_t – cijena na kraju razdoblja t ,

P_0 – cijena na početku razdoblja t .

Prilagođene zaključne cijene korigirane su za dividende, odnosno u njihov je izračun uključen tekući novčani dohodak, stoga je povoljno koristiti ih za računanje prinosa. Nakon što su podatci pročišćeni od nedostajućih vrijednosti, pojedini niz sastojao se od 3449 dnevnih prinosa, što čini ukupno 17245 podataka.

Slika 1 Isječak izračunatih dnevnih prinosa (%)

Datum	DAX	FTSE 100	CAC 40	IBEX 35	Euro Stoxx 50
5.1.2010	-0,271811	0,403618	-0,026409	0,488270	-0,180262
6.1.2010	0,040953	0,135808	0,118617	0,148304	-0,089637
7.1.2010	-0,248084	-0,059671	0,177469	-0,459810	-0,077079
8.1.2010	0,303188	0,135705	0,505363	-0,027123	0,349479
11.1.2010	0,047869	0,070469	-0,050673	-0,727617	-0,252170

izvor: izrada autora

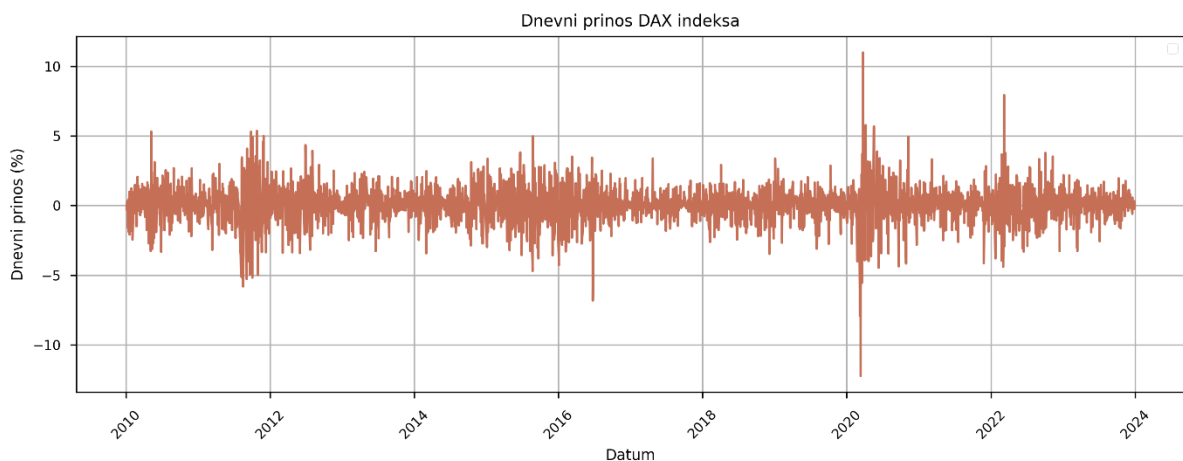
Slijedi deskriptivna statistička analiza odabranih vremenskih nizova, dekompozicija vremenskih nizova, ispitivanje stacionarnosti i aplikacija modela u program.

4.1 Deskriptivna analiza odabranih dioničkih burzovnih indeksa

Prema Dumičić i sur. (2011) izračunate su sljedeće mjere deskriptivne statistike: aritmetička sredina, standardna devijacija, koeficijent varijacije, prvi, drugi i treći kvartil, najmanja i najveća vrijednost u nizu (uz pripadajući indeks retka), koeficijenti zaobljenosti i asimetrije te mod. S ciljem otkrivanja izdvojenih ekstremnih vrijednosti konstruirani su modificirani *box-plot* dijagrami.

Prosječni dnevni prinos DAX indeksa u promatranom razdoblju iznosio je 0,03 % uz prosječno odstupanje 1,26 % izraženo apsolutno, odnosno 4388,61 % izraženo relativno. Budući da aritmetička sredina u ovom slučaju nije reprezentativan pokazatelj, bitno je napomenuti da prvih 50 % prinosa indeksa iznosi 0,07 % i manje, a preostalih 50 % iznosi 0,07 % i više. Bilježi visok iznos koeficijenta zaobljenosti, stoga je distribucija je šiljastija od normalne i blago negativno asimetrična uz vrijednost koeficijenta asimetrije -0,30. Ne bilježi najčešću vrijednost. Najviši prinos i najniži prinos u promatranom razdoblju zabilježeni su u razmaku manjem od dva tjedna: najmanji prinos iznosio je -12,24 % (12.3.2024.), a najveći 10,98 % (24.3.2024.). Linijskim dijagramom prikazan je razvoj pojave na slici 2.

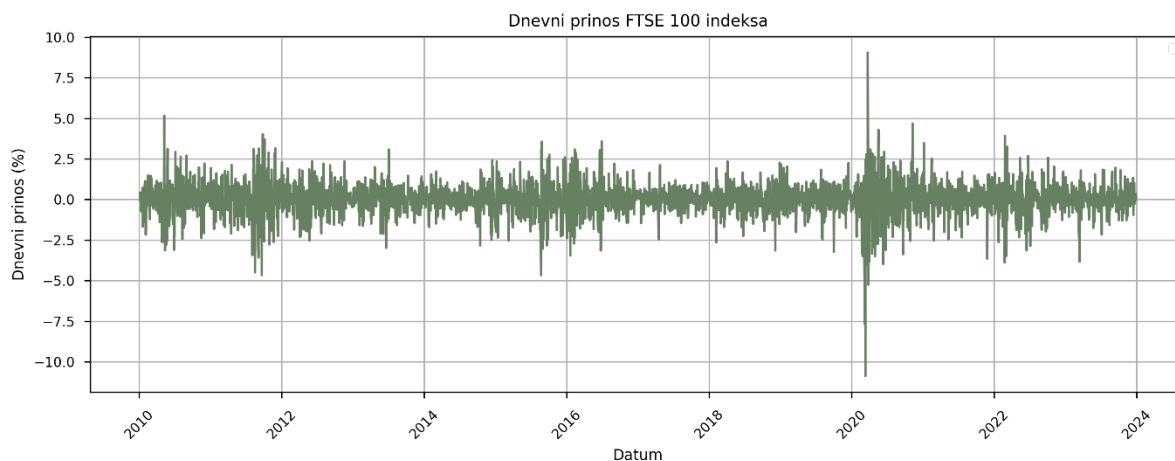
Slika 2 Dnevni prinos DAX indeksa 1.1.2010. - 31.12.2023.



izvor: izrada autora

FTSE 100 bilježi prosjek 0,01 % sa standardnom devijacijom 1,02 %, što čini odstupanje od 7992,16 %. Medijan distribucije iznosi 0,05 %, a modalna vrijednost ne postoji. Distribucija je šiljastija od normalne i blago negativno asimetrična. Bilježi maksimalnu i minimalnu vrijednost na iste datume kao i prethodni indeks u iznosima -10,87 % i 9,05 %, kako se jasno uočava na slici 3.

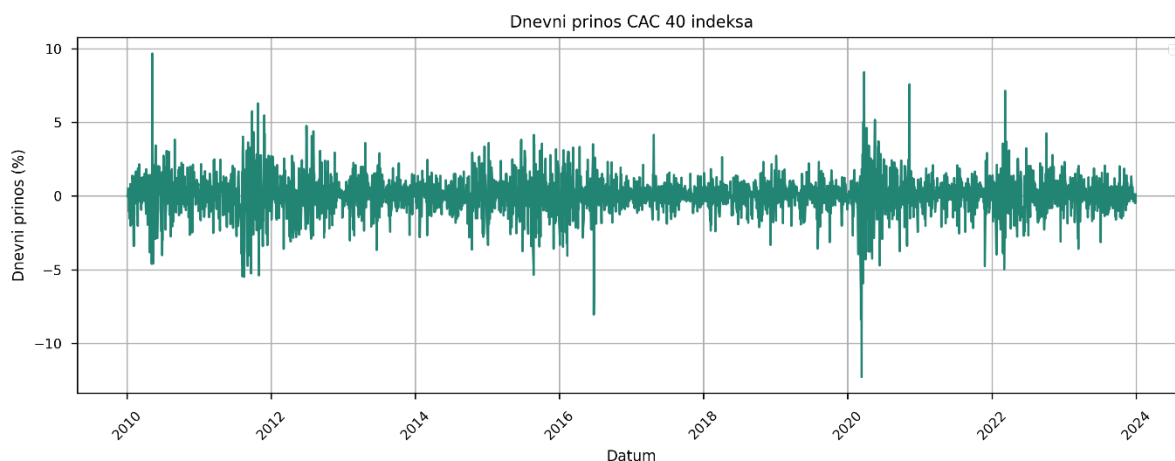
Slika 3 Dnevni prinos FTSE 100 indeksa 1.1.2010. - 31.12.2023.



izvor: izrada autora

Za CAC 40 prosječni dnevni prinos iznosi 0,02 % uz odstupanje 1,28 %, tj. 6200,06 %. Prvih 50 % dnevnih prinosa iznosi 0,06 % i manje, a preostalih 50 % iznosi 0,06 % i više. Distribucija je šiljastija od normalne i blago negativno asimetrična. U promatranom razdoblju najnižu vrijednost ostvaruje 12.3.2024. uz -12,28 %, a najvišu 2010. uz 9,66 %. Grafički prikaz prinosa vidljiv je na slici 4.

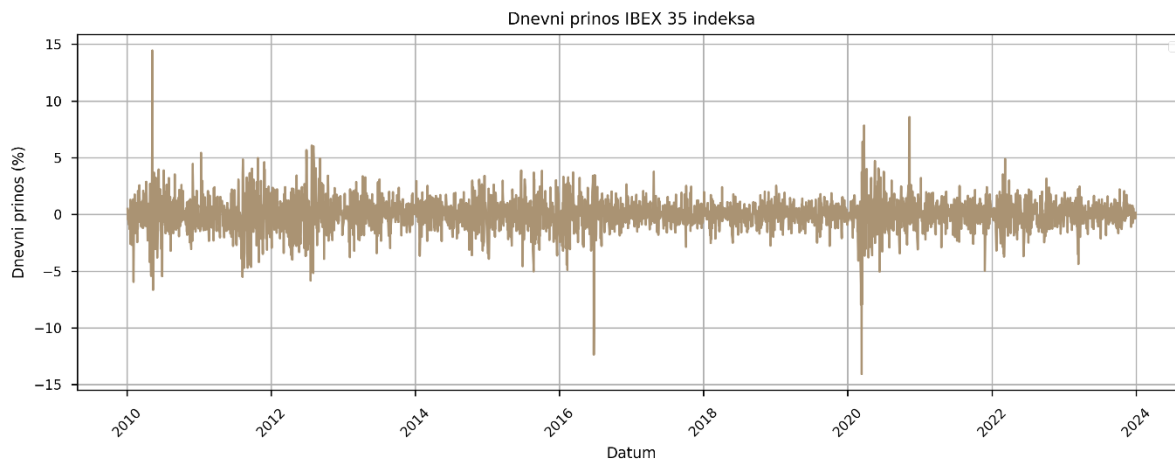
Slika 4 Dnevni prinos CAC 40 indeksa 1.1.2010. - 31.12.2023.



izvor: izrada autora

IBEX 35 prosječno ostvaruje povrat od 0,002 % uz devijaciju 1,39 % ili 81.835,94 % izraženo relativno. Srednja vrijednost podataka iznosi 0,04 %, dok modalne vrijednosti nema. Distribucija je šiljastija od normalne i blago ljevostrano asimetrična. Minimum i maksimum zabilježeni su na iste datume kao i za CAC 40, u 2024. i 2010. godini, uz vrijednosti -14,06 % i 14,43 %. Vrijednosti prinosa tijekom promatranog razdoblja vidljive su na slici 5.

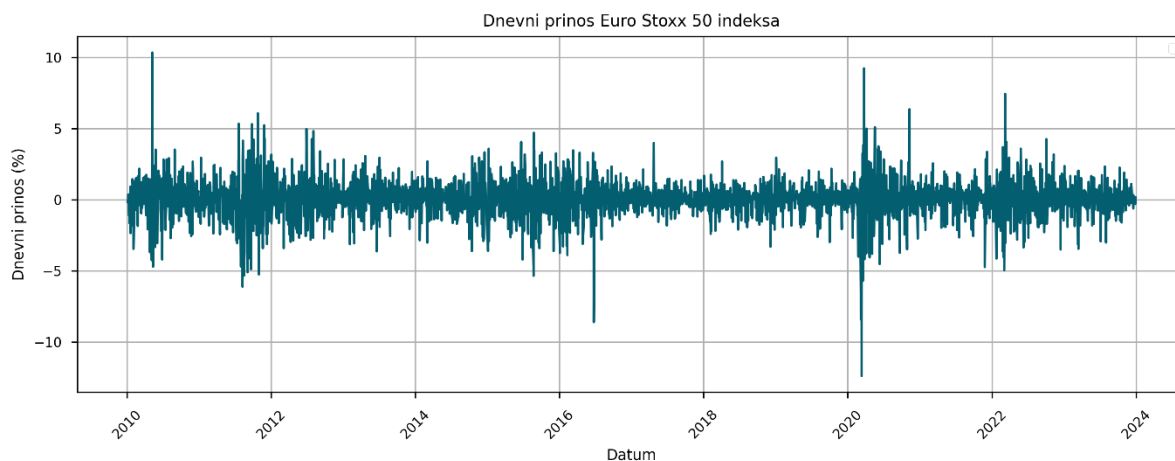
Slika 5 Dnevni prinos IBEX 35 indeksa 1.1.2010. - 31.12.2023.



izvor: izrada autora

Aritmetička sredina za Euro Stoxx 50 je 0,2 % uz prosječno odstupanje 1,31 % izraženo apsolutno, odnosno 7811,85 % izraženo relativno. Medijan iznosi 0,05 %. Šiljastija je od normalne i blago negativno asimetrična. Ekstremi CAC 40 i IBEX 35 indeksa imaju očit utjecaj na Euro Stoxx, s obzirom na to da su minimum i maksimum na iste dane u iznosima -12,40 % (2024.) i 10,35 % (2010.), što nije neobično jer su u njegovom sastavu ista poduzeća u udjelu većem od 40 %. Grafički prikaz vremenskog niza dan je na slici 6.

Slika 6 Dnevni prinos Euro Stoxx 50 indeksa 1.1.2010. - 31.12.2023.



izvor: izrada autora

Sumarno, najveći prosječni dnevni prinos imao je DAX indeks (0,03 %), a najmanji IBEX 35 (0,002 %). Najmanja i najveća odstupanja od prosjeka bilježi isti tandem: DAX (4387,97 %) i IBEX 35 (81.835,94 %). Što se tiče prvog kvartila, najpovoljniji rezultat ima FTSE 100 kojemu prvih 25 % dnevnih prinosa iznosi -0,46 % i manje, a preostalih 75 % iznosi -0,46 % i više. Najveći medijan ima DAX, a slijede ga CAC 40 i Euro Stoxx 50, dok niti jedna distribucija ne sadrži modalnu vrijednost.

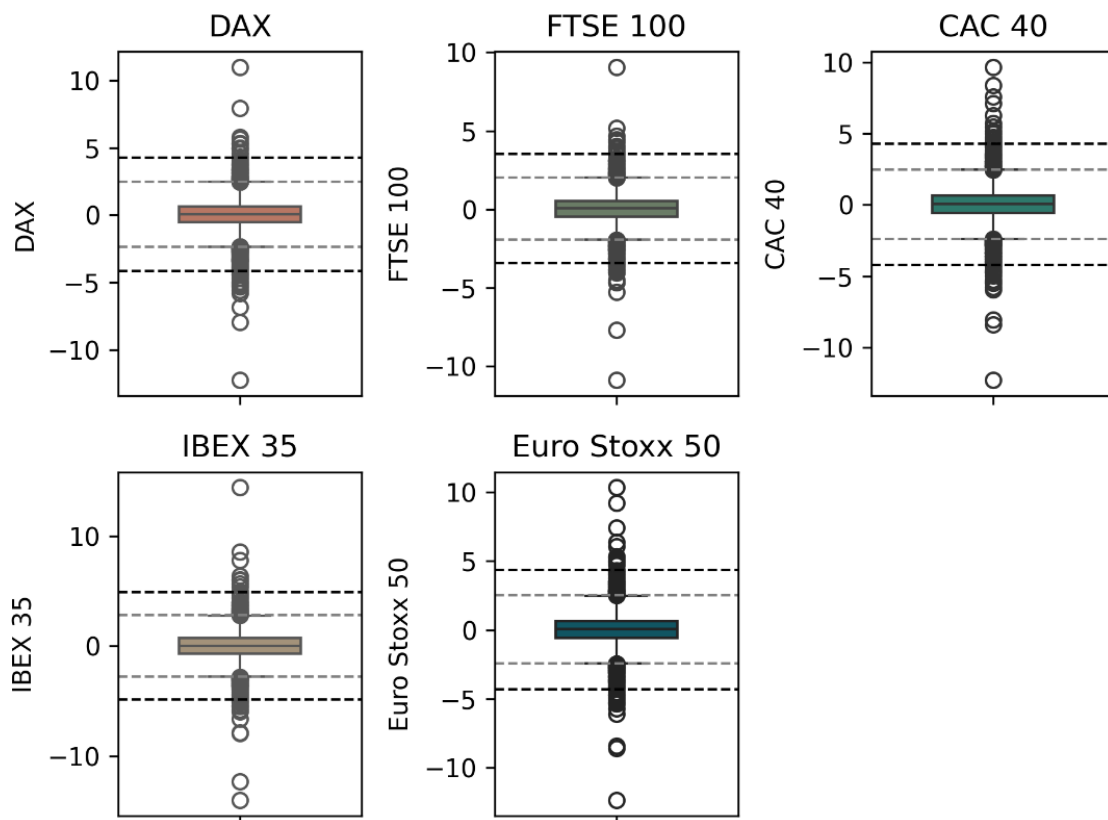
Najdrastičnije ekstreme i sukladno tome najveći raspon varijacije bilježi IBEX 35. Sve su distribucije leptokurtične, debelih repova, uz iznimno visoke vrijednosti kurtozisa. Navedeno se može objasniti visokom volatilnosti u odnosu na srednju vrijednost ukazujući na velik broj izdvojenica (Balanda i MacGillivray, 1988), što za investitore signalizira veći rizik. Nadalje, sve su distribucije blago negativno asimetrične, s tim da je IBEX 35 uz Euro Stoxx 50 najbliži normalnoj. Navedeno implicira više relativno velikih negativnih događaja u odnosu na pozitivne i potvrđuje koncept averzije prema gubitku (Kahneman i Tversky, 1979).

Na svim je promatranim tržištima najmanji prinos bio 12. ožujka 2020., što se prema The Guardianu (2020), može objasniti eskalacijom panike investitora uslijed zamaha COVID-19 pandemije koja se očitovala masovnom prodajom dionica, a istovremeno je došlo do znatnog pada cijene nafte. S druge strane, značajan skok i poboljšanje performansi za DAX i FTSE 100 samo nekoliko dana kasnije posljedica su stimulativnih injekcija vlada i banki u gospodarstvo. Najviša vrijednost CAC 40, IBEX 35 i Euro Stoxx 50 indeksa 10.5.2010. također se povezuje s političkim intervencijama država i MMF-a kojima je cilj bio zaustavljanje rastuće dužničke krize (Australian Broadcasting Corporation, 2010).

Na temelju grafičkih prikaza (slike 2.-6.) uviđa se da se nizovi sastoje isključivo od slučajne komponente i kreću se oko simetrale koja je prinos od 0 %, što će se naknadno dodatno razložiti. Uočavaju se izdvojenice, promjenjiva volatilnost i klasteriranje volatilnosti karakteristično za financijske serije.

Na slici 7. modificiranim *box-plot* dijagramima vanjske su međe isprekidane crne linije, a unutarnje isprekidane sive linije. Eksploracijskom analizom uočava se da svaki niz sadrži mnoštvo sumnjivih vrijednosti (između unutarnjih i vanjskih međa), a svaki ima 25-35 ozbiljnih izdvojenica (izvan vanjskih međa) pretežno u negativnom dijelu distribucije, stoga nije neobično da je prosjek svakog niza manji od medijana, odnosno da se radi o negativno asimetričnim distribucijama. Navedene izdvojenice aludiraju i na debele repove distribucije koji se očituju u visokim vrijednostima pokazatelja koeficijenta zaobljenosti, kurtozisa.

Slika 7 Modificirani B-P grafikoni pojedinih indeksa



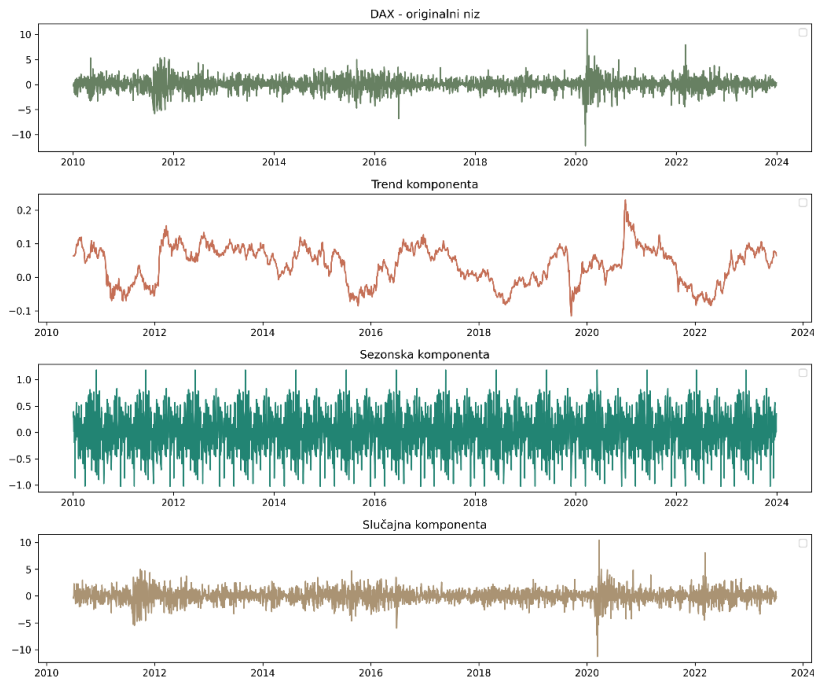
izvor: izrada autora

4.2 Dekompozicija i ispitivanje stacionarnosti vremenskog niza

Utvrđivanje komponenti vremenskog niza jedna je od polaznih točaka pri utvrđivanju razvoja pojave koja se provodi sa svrhom lakšeg odabira prikladnog prognostičkog modela. Vremenski se niz sastoji od uvijek prisutne slučajne komponente i sistematskih komponenti: trend, sezonske i cikličke komponente. Stacionaran je niz onaj koji ne sadrži sistematske komponente, ili preciznije, u njemu nisu prisutne striktno periodske varijacije, ne sadrži trend, odnosno očekivana vrijednost i varijanca pojave ne ovise o vremenu i postojeane je korelacijske strukture (Bahovec i Erjavec, 2009). Uobičajeno je provesti dekompoziciju vremenskog niza kako bi se ispitala postojanost sistematskih komponenti, a s ciljem utvrđivanja stacionarnosti vremenskog niza, provest će se Dickey-Fuller (*ADF*) test prema Enders (2015). Autokorelacijska analiza izrađena je prema Čižmešija i Sorić (2016).

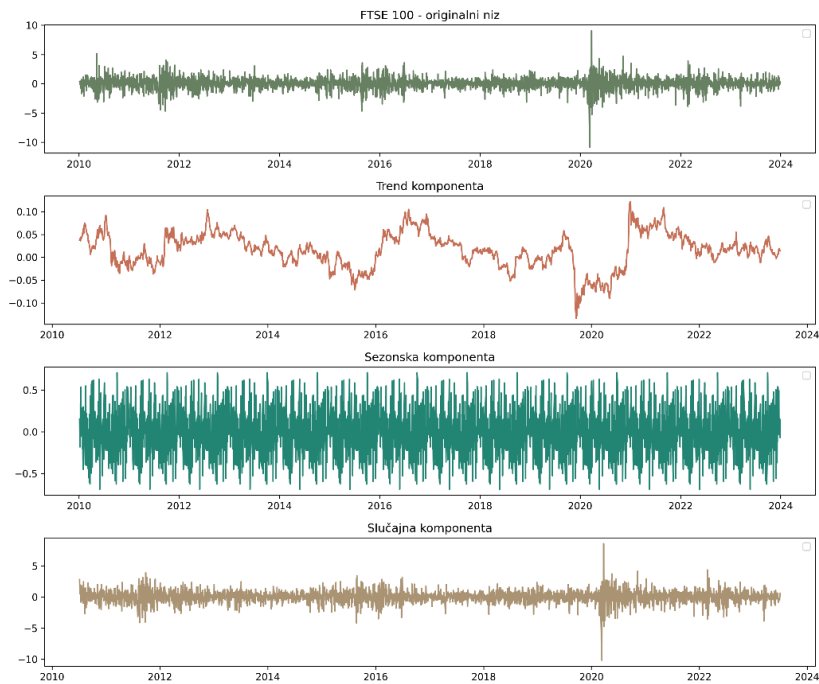
Provedena je računalna dekompozicija pojedinačnih vremenskih nizova korištenjem aditivnog modela koji podrazumijeva da su slučajna i sistematske komponente povezane u zbroju i izražene u mjernim jedinicama pojave. Izdvojene komponente grafički su prikazane pojedinačno za svaki niz slikama 8. – 12. koje se sastoje od linijskog grafikona osnovnog niza, linijskog grafikona trend komponente, sezonske i slučajne komponente.

Slika 8 Dekompozicija prinosa DAX indeksa



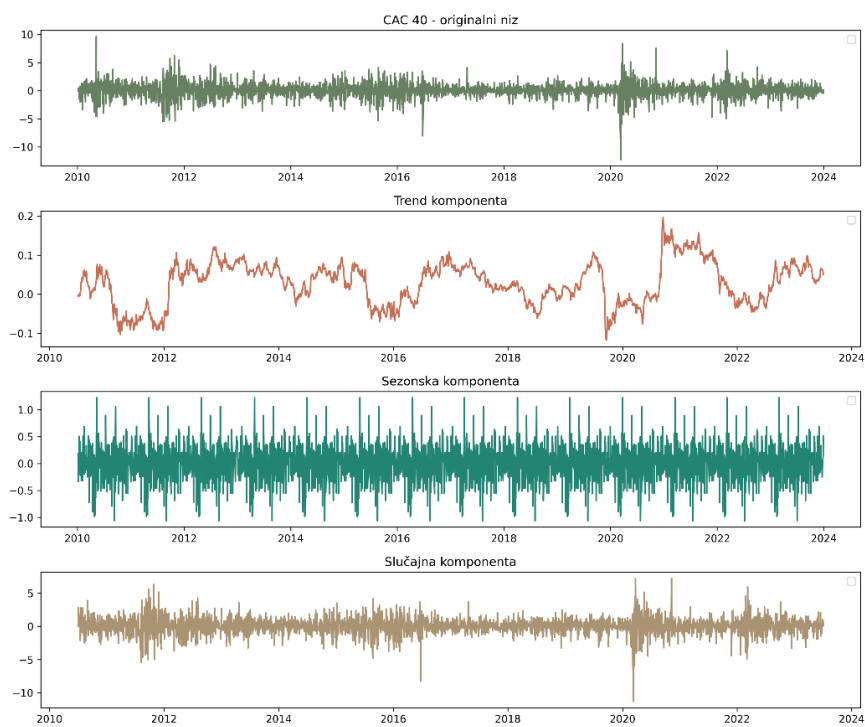
izvor: izrada autora

Slika 9 Dekompozicija prinosa FTSE 100 indeksa



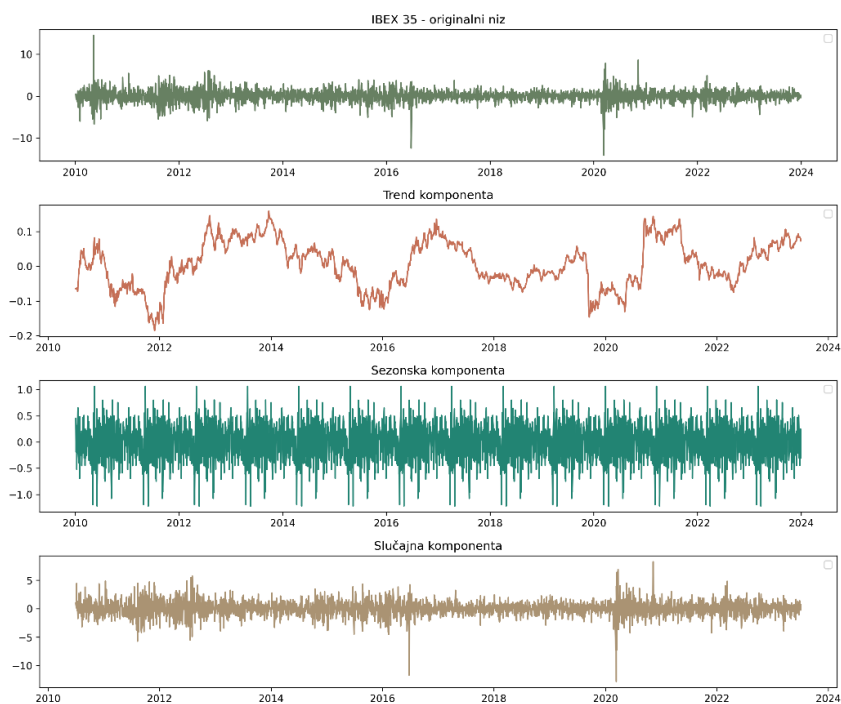
izvor: izrada autora

Slika 10 Dekompozicija prinosa CAC 40 indeksa



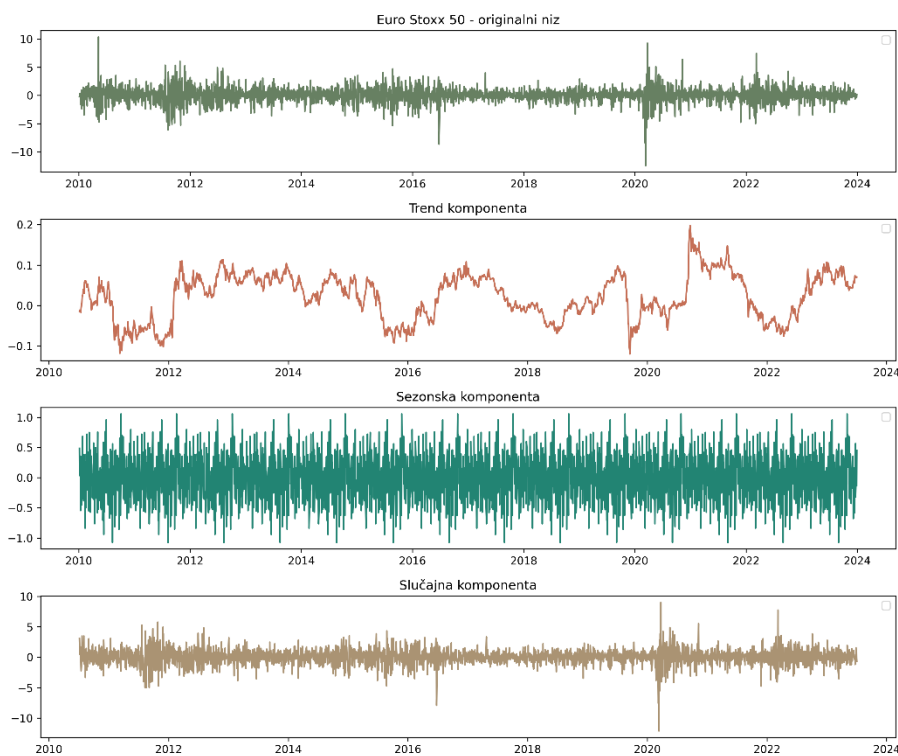
izvor: izrada autora

Slika 11 Dekompozicija prinosa IBEX 35 indeksa



izvor: izrada autora

Slika 12 Dekompozicija prinosa Euro Stoxx 50 indeksa



izvor: izrada autora

Jednak se zaključak može izvesti i primijeniti na sve prikazane vremenske nizove.

Naime, ukoliko postoji trend u podacima, drugi grafikon imao bi liniju jasno usmjerenu prema gore ili dolje, ovisno o dugoročnom trendu, no budući da to nije slučaj, nizovi ne sadrže trend komponentu.

Nadalje, sezonska komponenta odražava periodične obrasce unutar podataka. Na grafikonu se sezonalnost ispoljava u obliku relativno pravilnih oscilacija oko centralne linije, a ne može se primijetiti na liniji prinosa.

Konačno, posljednji grafikon prikazuje slučajnu komponentu, to jest dosad neobjašnjene fluktuacije u podacima. Gotovo se savršeno podudara s inicijalnim nizom, što ukazuje na to da je većina varijacija u podacima obuhvaćena upravo slučajnom komponentom.

Dickey-Fuller test koristi se za ispitivanje stacionarnosti niza. Sadržaj je nulte hipoteze da postoji jedinični korijen, što ukazuje na to da niz nije stacionaran. Na temelju testnih veličina i p-vrijednosti koja je približno 0,00 za sve nizove kako je prikazano na slici 13., pri navedenim

kritičnim vrijednostima, uz sve uobičajene razine signifikantnosti odbacuje se nulta hipoteza, odnosno ne može se prihvatiti pretpostavka da postoji jedinični korijen, što znači da su nizovi stacionarni.

Slika 13 Ispitivanje stacionarnosti niza ADF testom

Kritične vrijednosti	
1%	-3,432218
5%	-2,862365
10%	-2,567209

Indeks	ADF	p-Value	Odluka
DAX	-21,718836	0,000000	H1
FTSE 100	-13,573774	2,1894E-10	H1
CAC 40	-22,073793	0,000000	H1
IBEX 35	-21,652090	0,000000	H1
Euro Stoxx 50	-21,990794	0,000000	H1

izvor: izrada autora

Formiranjem autokorelacijske funkcije (ACF) i provođenjem Ljung-Box Q-testa veličine dolazi se do zaključka da, premda su vrijednosti ACF-a relativno niske za većinu lagova, za svaki od pet ispitanih nizova postoji statistički značajna autokorelacija nakon 6. reda (ispitana je autokorelacija do reda $k = 12$) jer je p-vrijednost manja od razine signifikantnosti 5 %. Za IBEX 35 indeks autokorelacija je značajna već nakon 3. reda. Primjer provedene autokorelacijske analize na indeksu DAX vidljiv je na slici 14.

Slika 14 Analiza autokorelacijske funkcije i Ljung-Boxov test na primjeru prinosa DAX indeksa

Lag	ACF	Ljung-Box Stat	P-value
1	0,011313	0,454821	0,500054
2	0,003697	0,503418	0,777471
3	0,004858	0,587345	0,899323
4	-0,036826	5,411187	0,247647
5	-0,001771	5,422348	0,366536
6	-0,031059	8,855653	0,181860
7	0,048074	17,083163	0,016868
8	-0,035704	21,622731	0,005665
9	0,014546	22,376402	0,007760
10	-0,009775	22,716886	0,011841
11	0,018719	23,965706	0,012879
12	0,002137	23,981991	0,020456

izvor: izrada autora

Premda se radi o stacionarnim procesima, ne mogu se nazvati čistim slučajnim procesima uslijed statistički značajne korelacije među članovima niza, iz čega proizlazi da je sadašnji prinos uvjetovan povijesnim.

Slučaj kad trenutne cijene na burzi, a posljedično i prinosi, odražavaju sve dostupne informacije i uslijed toga slijede slučajni hod onemogućava predviđanje cijene i ostvarivanje iznadprosječnog povrata, stoga se takvo tržište naziva efikasnim (Fama, 1970). S druge strane, slabi oblik hipoteze efikasnog tržišta podrazumijeva slučaj pri kojem su u trenutačne cijene ugrađene informacije o cijenama u prethodnim razdobljima, a s obzirom na postojeću autokorelaciju, zaključuje se da se prinosi mogu predviđati korištenjem zabilježenih povijesnih podataka. Analiza sugerira da, iako su nizovi stacionarni, za nekoliko specifičnih *lagova* postoji statistički značajna korelacija, što može biti relevantno za kratkoročne predikcije i analizu tržišnih obrazaca.

4.3 Implementacija odabranih prognostičkih modela u programski jezik

Originalni nizovi preuzeti su u *Pythonu* i prilagođene zaključne vrijednosti transformirane su u dnevne prinose. Stupci s prinosima spojeni su i spremljeni u podatkovni okvir u *Pythonu* pod nazivom „data“. Podatkovni je okvir pročišćen tako da su uklonjeni svi reci kod kojih je ustanovljeno da neki stupac sadrži nepostojeću vrijednost.

Za svaki je prognostički model kreiran novi podatkovni okvir čiji su elementi formirani sukladno jednadžbama navedenim u poglavlju 3. *Teorijski okvir prognoziranja burzovnih indeksa*.

Nakon izračuna prognostičkih vrijednosti, kreira se novi podatkovni okvir koji će sadržavati rezidualna odstupanja izračunata kao razlika dvaju prethodnih podatkovnih okvira za svaki primijenjeni model. Kako bi se dobio *RMSE*, reziduali su kvadrirani i izračunat je njihov prosjek po stupcima, a u posljednjem je koraku i korijenovan.

Naivnim modelom I ukupno je prognozirani prinos indeksa kreiranjem novog podatkovnog okvira čiji su elementi jednostavno pomaknuti podatci za jedan dan unaprijed naredbom *shift* kako je vidljivo na slici 15. Pripadajuća srednjekvadratna prognostička pogreška izračunata je ranije navedenom metodologijom čija je primjena prikazana slikom 16., a pri kasnijoj kvantitativnoj ocjeni prognostičkih modela korišten je prosjek *RMSE* svih pet vremenskih nizova.

Slika 15 Isječak iz koda za naivni model I kao primjer primjene prognostičkog modela u Pythonu

```
# NAIVNI MODEL I
# Kreiranje praznog Data Frame-a u koji će se spremati prognostičke vrijednosti
NMI = pd.DataFrame(np.nan, index=data.index, columns=data.columns)

# Popunjavanje praznog Data Frame-a tako da vrijedi  $F(t+1) = y(t)$ 
NMI = data.shift(1)
print(NMI)
```

Date	DAX	FTSE 100	CAC 40	IBEX 35	Euro Stoxx 50
2010-01-05	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN
2010-01-06	-0.271811	0.403618	-0.026409	0.488270	-0.180262
2010-01-07	0.040953	0.135808	0.118617	0.148304	-0.089637
2010-01-08	-0.248084	-0.059671	0.177469	-0.459810	-0.077079
2010-01-11	0.303188	0.135705	0.505363	-0.027123	0.349479
...
2021-03-15	-0.459868	0.363663	0.211975	0.599325	-0.319317
2021-03-16	-0.282503	-0.174515	-0.174969	-0.105265	-0.091826
2021-03-17	0.664943	0.798553	0.322400	0.258237	0.551456
2021-03-18	0.268110	-0.601151	-0.010079	-0.672236	-0.031680
2021-03-19	1.225690	0.251379	0.131634	0.291873	0.462370

[2759 rows x 5 columns]

izvor: izrada autora

Slika 16 Isječak iz koda za računanje RMSE na primjeru naivnog modela I

```
# Računanje RMSE
resid_NMI = pd.DataFrame(np.nan, index=data.index, columns=data.columns)
m,n = data.shape

# Kreiranje DataFrame-a s rezidualima
resid_NMI.iloc[1:m,:] = data.iloc[1:m,:].values - NMI.iloc[1:m,:].values

# Kvadriranje reziduala
resid_NMI = resid_NMI.apply(np.square)

# Prosjek po stupcima
prosjek_NMI = resid_NMI.mean()
RMSE_NMI = np.sqrt(prosjek_NMI)
print('Prosječni RMSE pri prognoziranju naivnim modelom I:',RMSE_NMI.mean())
```

Prosječni RMSE pri prognoziranju naivnim modelom I: 1.8206065603854225

izvor: izrada autora

Naivni model II kreiran je u podatkovnom okviru iteracijama pomoću dvostruke *for* petlje za 3447 dana zbrajanjem stvarne vrijednosti razdoblja t i diferencije stvarnih vrijednosti razdoblja t i $(t - 1)$.

Prognostičke vrijednosti pomičnih prosjeka izračunate su prolaženjem petlje kroz stupce originalnog podatkovnog okvira i punjenjem novog podatkovnog okvira aritmetičkim sredinama različitog broja (k) podataka originalnog niza za pojedini indeks.

Za svaki AR(p) model, $p = 1, 2, 3, 4, 5$, izračunati su optimalni parametri metodom najmanjih kvadrata na temelju vrijednosti cijelog niza iteracijom kroz stupce originalnih podataka, a potom je dobivena jednadžba primijenjena s ciljem prognoziranja niza. Prognostičke su vrijednosti spremene su u novi podatkovni okvir .

Početni koraci pri modeliranju prinosa geometrijskim Brownovim gibanjem obuhvaćaju definiranje vremenskog pomaka, aritmetičke sredine pojedinog niza i standardne devijacije pojedinog burzovnog indeksa. Petljom se iterira kroz svaki dan u početnim podacima, generira se 1000 simulacija slučajnog broja, računa se 1000 pripadajućih prinosa i njihov se prosjek sprema u novi podatkovni okvir kao prognostička vrijednost za taj dan. Program daje *output* kôda otprilike nakon sat vremena.

Nakon toga provodi se dijeljenje podataka u omjeru 80 : 20 na poduzorke za treniranje i poduzorke za testiranje modela. Poduzorak za treniranje sastojao se od 2759 redova vrijednosti za svaki pojedini indeks, a poduzorak za testiranje od njih 690. Na poduzorku za treniranje korišteni su prethodno navedeni kodovi, dok su izračuni za test dio modificirani u skladu s jednadžbama modela u prognostičkom horizontu prema poglavlju 3. *Teorijski okvir prognoziranja burzovnih indeksa*.

Za naivni model I prognostičke vrijednosti *test* poduzorka bile su jednake posljednjoj stvarnoj vrijednosti *train* poduzorka. Na sličan su način podatkovni okviri za pomične prosjeke s k članova bili ispunjeni vertikalno istim brojevima - aritmetičkim sredinama posljednjih k stvarnih vrijednosti *train* dijela podataka. Naivni model II proporcionalno povećava diferenciju posljednjeg i pretposljednog člana poduzorka za treniranje udaljavanjem od posljednje stvarne vrijednosti. Autoregresijski modeli unutar jedne petlje kôda formiraju prognozu i za jedan i za drugi poduzorak, dok se kod Brownovog gibanja ne razlikuju postupci.

Proveden je izračun *RMSE* na obama poduzorcima za svaki model s ciljem usporedbe točnosti prognoze.

5 Rezultati i komparativna analiza prognoziranja dioničkih burzovnih indeksa

U nastavku slijedi prikaz rezultata provedbe empirijskog istraživanja i usporedba prediktivne moći korištenih modela.

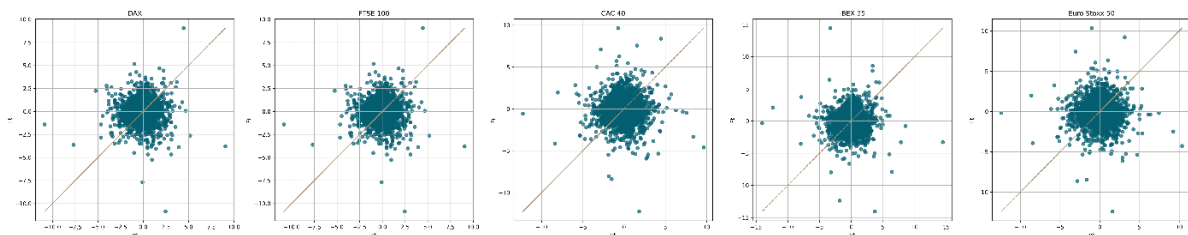
5.1 Analiza prediktivne moći prognostičkih modela

Pojedinačni rezultati primjene odabranih modela potkrijepljeni su grafičkim prikazima u formi linijskog dijagrama i dijagrama rasipanja uz pripadajuću kvantitativnu dijagnostiku.

Naivni modeli

Na apscisi je skala stvarnih vrijednosti prinosa, a na ordinati prognostičkih vrijednosti. Na slici 17. vidljivo je da su točke raspršene oko linije savršene prognoze i koncentrirane oko prinosa 0 %. Točke koje su najudaljenije ukazuju na ekstremne vrijednosti koje model nije uspio obuhvatiti. Budući da su pogreške simetrično raspoređene oko linije, ne postoji pristranost u vidu precijenjenosti ili podcijenjenosti stvarnih vrijednosti. Usporedbom sa stvarnim cijenama dolazi se do zaključka da naivni model I prati stvarne vrijednosti indeksa uz prosječan *RMSE* 1,77 %.

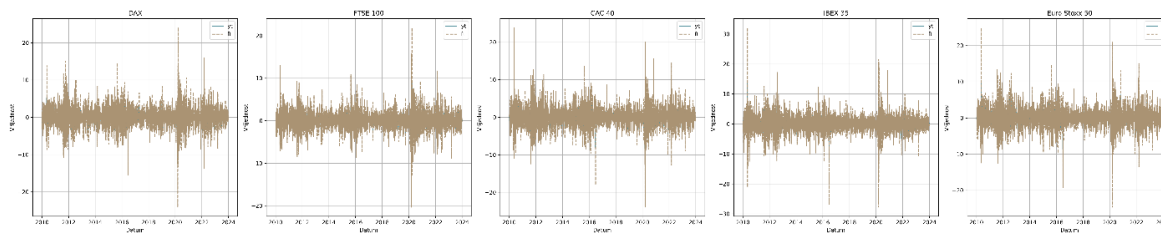
Slika 17 Dijagram raspršenosti za ocjenu učinkovitosti naivnog modela I



izvor: izrada autora

Budući da se linije stvarnih i prognostičkih vrijednosti na slici 18. gotovo u potpunosti preklapaju (jedva se nazire linija izvornog niza) za naivni model II, stječe dojam kako model dobro prati stvarne vrijednosti prinosa. Prosječno odstupanje stvarnih od prognostičkih vrijednosti iznosi 3,06 %.

Slika 18 Linijski dijagram stvarnih i prognostičkih vrijednosti primjenom naivnog modela II



izvor: izrada autora

Modeli izgladivanja – prognostički modeli temeljeni na pomičnim prosjecima

Iz izračuna prosječnog pokazatelja *RMSE* za korištenih pet nizova, $k = 2, 3, 4, 10, 50, 100, 500, 1000$ prema slici 19., uočava se da dvočlani pomični prosjek ima najmanje prosječno odstupanje, 0,88 %, što sugerira da je model bolji u predviđanju podataka u odnosu ostale. Navedeno se može objasniti time da manji broj članova prosjeka znači uspješno filtriranje kratkoročnih fluktuacija i buke bez zadržavanja na povijesnim vrijednostima. Naime, povećanjem broja članova kliznog prosjeka raste i pogreška uslijed većeg izgladivanja serije, to jest većeg prilagođavanja prošlim podacima. S druge strane, MA(2) u izračun pogreške uključuje puno manje podataka u odnosu na, primjerice, MA(1000), stoga donošenju zaključka treba pristupiti kritički. Može se primijetiti i kako nakon $k = 50$ pogreška opada, no daljnjim povećanjem ponovo raste bez strukturiranog obrasca, što se isto pripisuje izračunu pogreške na različitom broju prognostičkih pogrešaka.

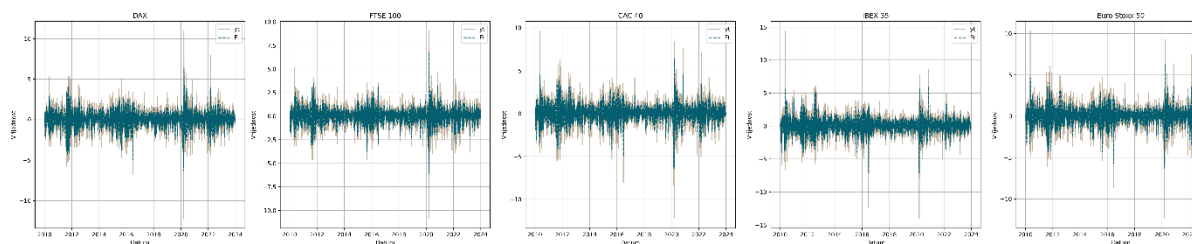
Slika 19 RMSE u ovisnosti o broju članova pomičnog prosjeka

k	RMSE
2	0,883817
3	1,022430
4	1,087462
10	1,192766
50	1,243023
100	1,228827
500	1,181522
1000	1,189645

izvor: izrada autora

Grafički prikaz MA(2) i stvarnih vrijednosti (slika 20.) jasno prikazuje kako je linija prognostičkih vrijednosti izgladnena, manje drastičnih amplituda.

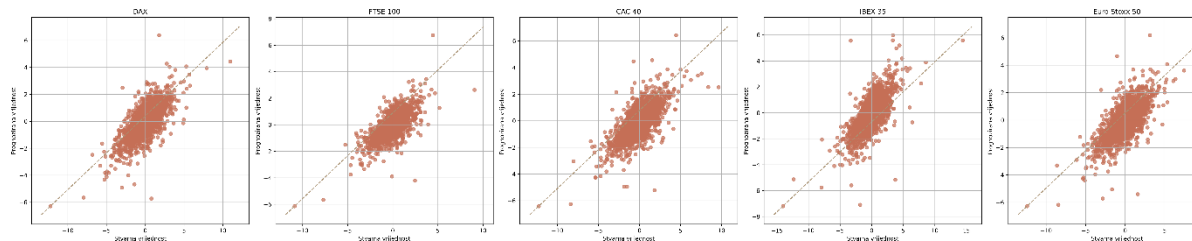
Slika 20 Linijski dijagram stvarnih i prognostičkih vrijednosti primjenom MA(2)



izvor: izrada autora

Dijagram raspršenosti na slici 21. pokazuje da je u većini slučajeva stvarna vrijednost indeksa prognozom podcijenjena uz iznimku indeksa IBEX 35, što je u skladu s uprosječivanjem vrijednosti. Unatoč tome, koncentracija podataka u mnogome prati liniju savršene prognoze.

Slika 21 Dijagram raspršenosti za MA(2)



izvor: izrada autora

Autoregresijski model, AR(p)

Nakon izračuna prognostičkih pogrešaka dolazi se do vrijednosti RMSE za pojedini p pri primjeni AR(p) modela koje se značajno ne razlikuju kako je prikazano slikom 22.

Slika 22 RMSE u ovisnosti o redu modela p

p	RMSE
1	1,251055
2	1,251204
3	1,251207
4	1,250716
5	1,250749

izvor: izrada autora

Najmanji korijen srednjekvadratne prognostičke pogreške ima AR(4) s vrijednošću 1,25 %, no radi se o gotovo neznatnim razlikama u točnosti prognoze. Korijen konzistentne predikcije u ovom slučaju leži u stabilnosti vremenskog niza. Izračunati parametri modela metodom najmanjih kvadrata prikazani su na slici 23.

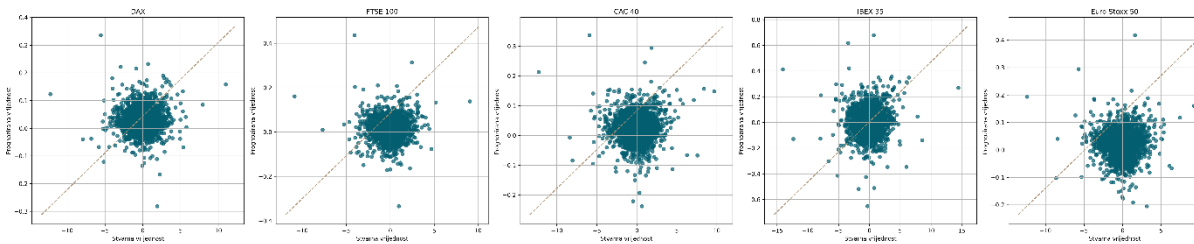
Slika 23 Parametri AR(4) modela dobiveni metodom najmanjih kvadrata

	Intercept	Lag1	Lag2	Lag3	Lag4
DAX	0,029204	0,009779	0,003934	-0,002290	-0,025098
FTSE 100	0,013235	-0,001614	-0,017195	-0,002894	-0,033631
CAC 40	0,021243	-0,002695	-0,001731	-0,009115	-0,026906
IBEX 35	0,001764	0,015475	0,000445	-0,032192	-0,045624
Euro Stoxx 50	0,017626	-0,013748	-0,003517	-0,008121	-0,025482

izvor: izrada autora

Dijagram raspršenosti stvarnih i prognoziranih vrijednosti (slika 24.) pokazuje visoku koncentraciju vrijednosti uz prinos 0 %, no na gotovo svim nizovima bilježi se velik broj podcijenjenih vrijednosti.

Slika 24 Dijagram raspršenosti za AR(4) model

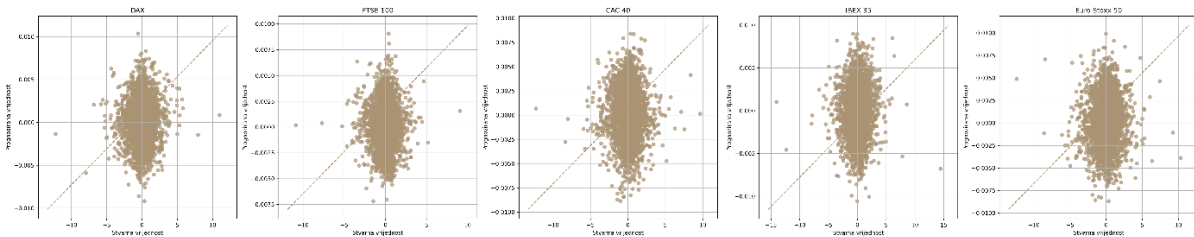


izvor: izrada autora

Stohastičko modeliranje - geometrijsko Brownovo gibanje

Primjena geometrijskog Brownovog gibanja rezultirala je simuliranim prinosima uz prosječan korijen srednjekvadratne prognostičke pogreške 1,58 %. Dijagram raspršenosti na slici 25. prikazuje grupiranje prinosa oko 0 %, pri čemu parovi stvarne i prognostičke vrijednosti tvore gotovo vertikalnu liniju uz otprilike jednak broj precijenjenih i podcijenjenih vrijednosti.

Slika 25 Dijagram raspršenosti za model Geometrijskog Brownovog gibanja



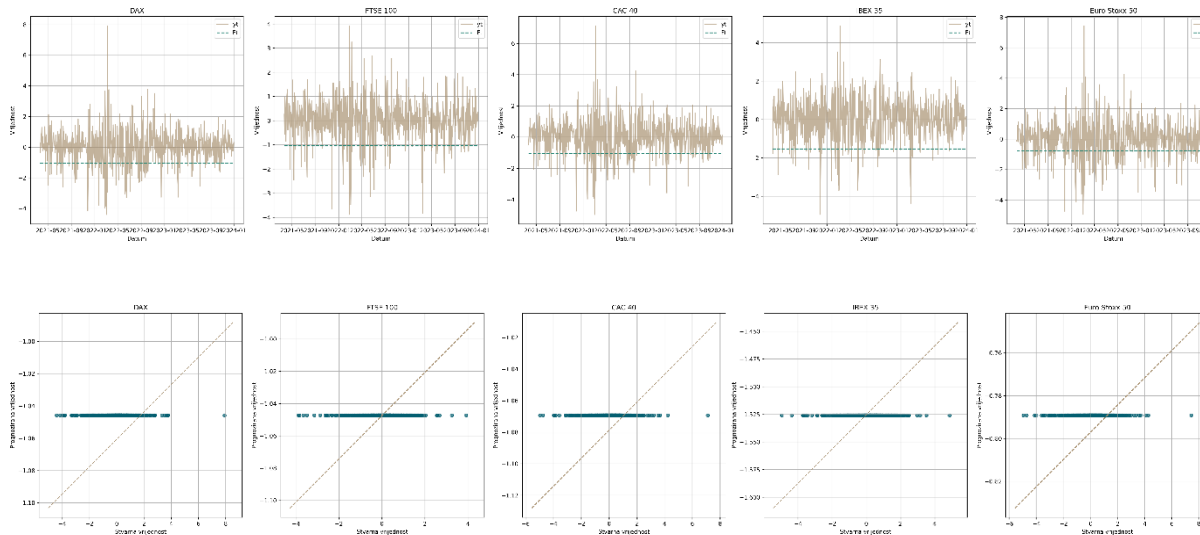
izvor: izrada autora

5.2 Validacija prognostičkih modela uz dijeljenje podataka na poduzorak za treniranje modela i testiranje modela

Dijeljenje podataka na poduzorke za treniranje i testiranje modela bacilo je novo svjetlo na efikasnost prognostičkih modela s obzirom na njihovu uspješnost u generiranju vrijednosti na neviđenim podacima.

Budući da su tijekom prognostičkog horizonta prognozirane vrijednosti konstantne za naivni model I i modele pomičnih prosjeka, prognostička je vrijednost prikazana u obliku horizontalnog pravca na linijskom grafikonu i horizontalnih vrijednosti na dijagramu rasipanja ne pokazujući tendenciju prljanjanja uz liniju savršene prognoze. Primjer navedenog vidljiv je na slici 26. na podacima za naivni model I. Usprkos tome, navedeni su modeli u kvantitativnom smislu (izračunom *RMSE*) bliski rezultatima prognoza poduzorka za treniranje.

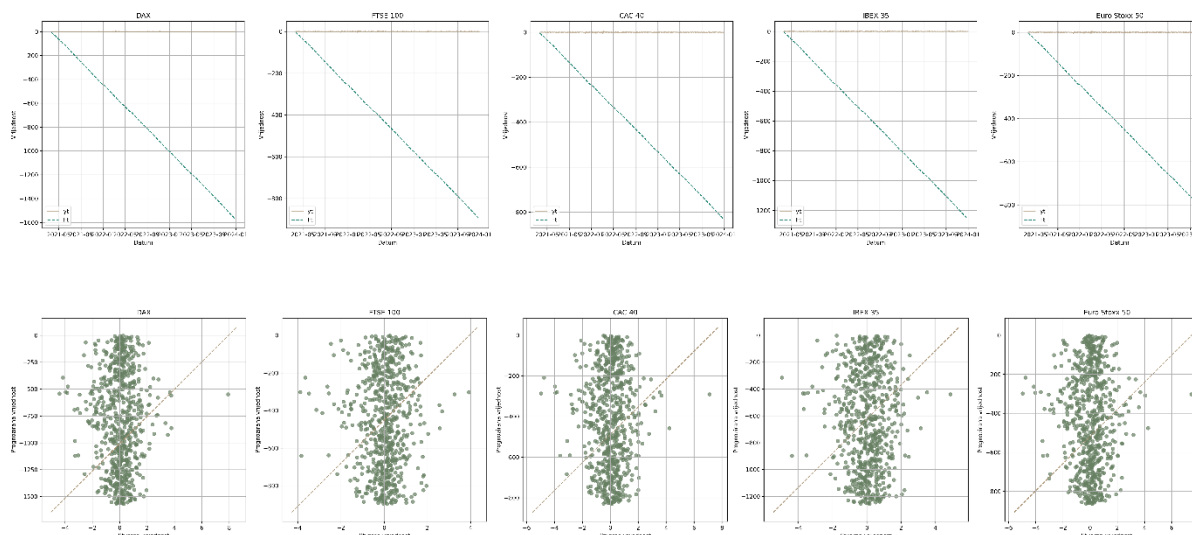
Slika 26 Konstantna prognostička vrijednost na primjeru naivnog modela (I) na poduzorku za testiranje



izvor: izrada autora

Budući da je razlika diferencija posljednjeg i pretposljednâ člana *train* niza podataka negativna, naivni model II prognozira negativan linearni trend na poduzorku za testiranje koji se sustavno udaljava od linije stvarnih podataka u promatranom razdoblju kako je prikazano na slici 27. Dijagram rasipanja prikazuje prognostičke vrijednosti kao irelevantne u odnosu na stvarno kretanje pojave. Grafički prikazi oslikavaju neadekvatnost modela za dane podatke što apostrofira potrebu za analizom razvoja pojave prije odabira prikladnog prognostičkog modela.

Slika 27 Linijski dijagram i dijagram rasipanja poduzorka za testiranje i prognostičkih vrijednosti za naivni model II



izvor: izrada autora

AR(p) modeli za različite redove p pokazuju vrlo bliske prognostičke vrijednosti, a time i prognostičke pogreške. Ipak, najmanji RMSE bilježi AR model reda 1, a uočava se i pozitivna korelacija između rasta pogreške i broja *lagova* prema slici 28. Svi modeli imaju bolji performans na test dijelu podataka.

Slika 28 Međusobna usporedba AR(p) modela prema RMSE

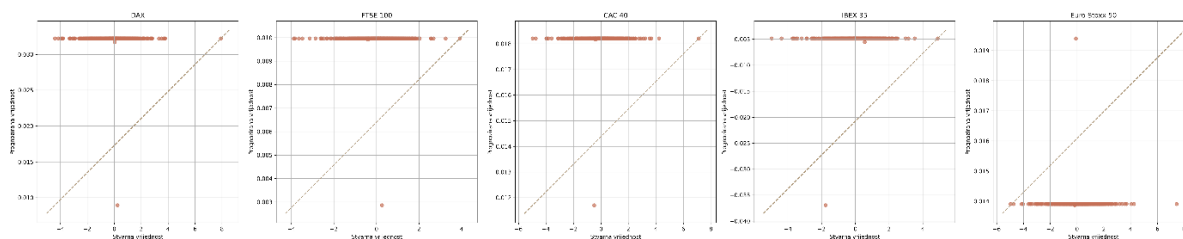
AR model	RMSE			min RMSE
	TRAIN	TEST	TRAIN-TEST	
AR(1)	1,293797	1,060705	0,233092	test
AR(2)	1,293998	1,060707	0,233291	test
AR(3)	1,294031	1,060710	0,233321	test
AR(4)	1,293254	1,060721	0,232533	test
AR(5)	1,293293	1,060744	0,232549	test

Koef. korelacije (p ;RMSE(TEST))
0,90109543

izvor: izrada autora

Dijagram rasipanja (slika 29.) odaje sistematičnu precijenjenost AR(1) niza za treniranje u 80 % slučajeva. Navedeno je rezultat korištenja samo ponderirane prethodne prognostičke vrijednosti u prognoziranju, što uvelike sliči naivnom modelu (I).

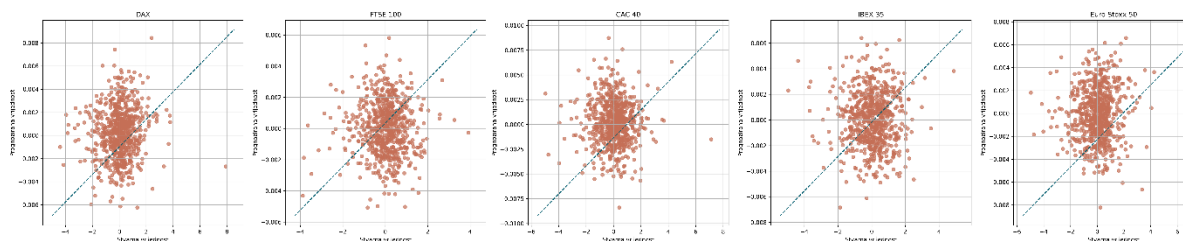
Slika 29 Dijagram rasipanja AR(1) modela za test poduzorak



izvor: izrada autora

Naposljetku, poduzorak za testiranje kod geometrijskog Brownovog gibanja također ima manje prosječno odstupanje u odnosu na poduzorak za treniranje. U skladu s generiranim nasumičnim kretanjima prinosa, na slici 30. nije moguće utvrditi generalni uzorak precijenjenosti ili podcijenjenosti stvarnih vrijednosti.

Slika 30 Dijagram raspršenosti poduzorka za testiranje modelom geometrijskog Brownovog gibanja



izvor: izrada autora

5.3 Komparativna analiza prognostičkih modela pomoću kvantitativnih indikatora kvalitete uspješnosti

Nakon primjene prognostičkih modela, vrednovat će se njihova prediktivna moć usporedbom kvantitativnog pokazatelja, korijena srednjekvadratne prognostičke pogreške, *RMSE*, koji je prikazan na slici 31.

Iz inicijalnih primjena odabranih prognostičkih modela model dvočlanih pomičnih prosjeka, *MA(2)*, daje optimalne rezultate uz *RMSE* 0,88 %. Radi se o modelu specijaliziranom za hvatanje kratkoročnih fluktuacija koji dobro filtrira šum, stoga ima ravnotežu između reaktivnosti u prognozi i izgladivanja. Slijede ga ostali modeli pomičnih prosjeka, potom autoregresijski modeli, geometrijsko Brownovo gibanje i naivni modeli I i II.

Slika 31 Usporedba RMSE inicijalno primijenjenih prognostičkih modela

	Model	RMSE
Naivni modeli	NMI	1,767383
	SQD	3,058985
Modeli pomičnih prosjeka	MA(2)	0,883817
	MA(3)	1,022430
	MA(4)	1,087462
	MA(10)	1,192766
	MA(50)	1,243023
	MA(100)	1,228827
	MA(500)	1,181522
	MA(1000)	1,189645
Autoregresijski modeli	AR(1)	1,251055
	AR(2)	1,251204
	AR(3)	1,251207
	AR(4)	1,250716
	AR(5)	1,250749
	GBM	1,581106

izvor: izrada autora

Dijeljenje podataka na poduzorak za treniranje i testiranje apostrofira razliku u izboru odgovarajućeg modela jer odražava njihovu sposobnost predviđanja nepoznatih podataka. Usporedba rezultata korištenjem kvantitativnog indikatora dana je na slici 32.

Najmanju pogrešku na poduzorku za testiranje bilježi model pomičnog prosjeka s 500 članova, 0,47 %. U preciznosti ga slijede konzistentniji autoregresijski modeli s prosječnom pogreškom od oko 1,06 %. Prosječna pogreška svih modela vrlo je bliska što ih čini adekvatnima za prognoziranje prinosa kao stacionarne vremenske serije. Od tog zaključka odudara naivni model II koji je i uključen u analizu s ciljem da se pokaže slabost prediktivne moći pogrešno odabranog modela.

Razlika u odstupanju između poduzorka za treniranje i testiranje modela ukazuje na to koliko se dobro modeli generaliziraju. MA(500) koji ima najmanju grešku ima veću razliku u performansama na *train* i *test* skupu, što ukazuje na njegovu nestabilnost. Najmanju razliku u prosječnoj pogreški *train* i *test* poduzorka bilježe modeli četveročlanih i tročlanih pomičnih prosjeka, što se može interpretirati kao pozitivan signal za daljnju optimizaciju. Najveću razliku naivni model II koji nije pokazao sposobnost generalizacije u zadanom nizu. Autoregresijski

modeli i geometrijsko Brownovo gibanje pokazuju relativno konzistentne rezultate iz čega se iščitava stabilnost u predviđanju.

Kod većine modela primjećuje se točnija prognoza u test dijelu podataka u odnosu na poduzorak za treniranje, što se može smatrati neočekivanim. Navedeno se može objasniti činjenicom da su za poduzorak za testiranje korištene najrecentnije stvarne vrijednosti s kraja 2020. i s početka 2021., nakon čega nisu zabilježeni veći makroekonomski šokovi, stoga su uzeti obrasci u podacima dobro opisivali kasniji tijek pojave.

Slika 32 Prognostički modeli uzlazno rangirani prema vrijednosti RMSE na poduzorku za testiranje

Model	TRAIN	TEST	TRAIN-TEST	min RMSE
MA(500)	1,215885	0,749090	0,466796	test
AR(1)	1,293797	1,060705	0,233092	test
AR(2)	1,293998	1,060707	0,233291	test
AR(3)	1,294031	1,060710	0,233321	test
AR(4)	1,293254	1,060721	0,232533	test
AR(5)	1,293293	1,060744	0,232549	test
MA(50)	1,286372	1,079089	0,207284	test
MA(4)	1,122459	1,092555	0,029904	test
MA(100)	1,269536	1,106258	0,163278	test
MA(10)	0,939417	1,116313	0,176897	train
GBM	1,692255	1,136779	0,555476	test
MA(3)	1,054062	1,139949	0,085888	train
MA(2)	0,910465	1,142101	0,231636	train
NMI	1,820607	1,555558	0,265049	test
SQD	3,149847	627,233998	624,084152	train

izvor: izrada autora

5.4 Implikacije rezultata analize za praktičnu primjenu i daljnja istraživanja

Rezultati istraživanja ugrubo su pokazali da porast složenosti modela nije povećao preciznost u predviđanju komponenti niza, odnosno primitivnije metode prognoziranja dovele su do jednakih ili čak točnijih prognoza u odnosu na naprednije. Iz tog razloga svaka buduća praktična primjena treba koristiti širok spektar metoda i među njima odabrati najefikasniji model, neovisno o njegovoj inicijalnoj jednostavnosti ili složenosti. Važno je napomenuti da nijedan model nije univerzalno najbolji za sve vremenske serije, odnosno sam odabir treba se temeljiti na empirijskoj analizi konkretnih podataka.

Dijagnostika modela provodila se grafičkim prikazom i izračunom korijena srednjekvadratne prognostičke pogreške, no poželjno je koristiti i druge adekvatne metrike kao što su prosječna apsolutna pogreška, prosječna apsolutna postotna pogreška, koeficijent determinacije, AIC i

BIC informacijske kriteriji, kros-validacija i analiza rezidualnih odstupanja. Usporedba prediktivne točnosti dvaju modela može se provesti Diebold-Mariano testom, jer, premda postoji razlika u performansama modela, ista ne mora nužno biti statistički značajna.

Brownovo gibanje kao naprednija financijska metoda nije se istaknula kao alat za predviđanje, no postoji mnogo modifikacija koje bi mogle poboljšati sposobnost modeliranja složenih financijskih procesa u odnosu na osnovnu formulu.

Daljnjim istraživanjima među statističke tehnike i stohastičko modeliranje trebalo bi dodati i suvremene načine modeliranja, kao što su umjetne neuronske mreže u čijoj je pozadini strojno učenje. Također bi bilo uputno ispitati efikasnost modela na manje razvijenim tržištima kapitala.

6 Zaključak

Za donošenje investicijske odluke uz uobičajene metode tehničke i fundamentalne analize financijskog instrumenta suvremena financijska ekonometrija i prediktivna analitika nude primjenu različitih modela prognoziranja budućih cijena i prinosa. Navedeno je moguće ukoliko na tržištu vrijedi slabi oblik hipoteze efikasnog tržišta, odnosno ukoliko su današnje cijene rezultat kretanja povijesnih. U suprotnom, prema hipotezi efikasnog tržišta, nemoguće je predvidjeti kretanje cijena jer one slijede slučajan hod.

S ciljem ispitivanja mogućnosti kratkoročnog prognoziranja prinosa korišteno je pet europskih dioničkih burzovnih indeksa koji zorno odražavaju stanja velikih europskih gospodarstava – DAX, FTSE 100, CAC 40, IBEX 35 i Euro Stoxx 50. Javno dostupni podatci o dnevnim prilagođenim zaključnim vrijednostima indeksa u razdoblju 1.1.2010. – 31.12.2023. transformirani su u dnevne prinose i služili su kao podloga za prognoziranje.

Promatranih pet vremenskih nizova koji su se sastojali samo od slučajne komponente pokazali su se stacionarnima, ali odražavali su statistički značajnu korelaciju među članovima niza, što je impliciralo da je cijene moguće predvidjeti korištenjem povijesnih podataka, odnosno u promatranom slučaju vrijedio je slabi oblik hipoteze efikasnog tržišta.

Korišteni su uobičajeni modeli za prognoziranje visokofrekventnih podataka: naivni modeli, modeli jednostavnih pomičnih prosjeka, autoregresijski modeli, a uz njih je primijenjeno i geometrijsko Brownovo gibanje uz provođenje Monte Carlo simulacija. Na inicijalnim je podacima ukupno testirano šesnaest modela navedenih četiriju podgrupa. Rezultati aplikacije modela vrednovani su grafičkim metodama u vidu linijskog dijagrama i dijagrama raspršenosti, a od kvantitativnih indikatora korišten je pokazatelj *RMSE*, korijen srednjekvadratne prognostičke pogreške. Dodatna evaluacija modela provedena je dijeljenjem podataka u omjeru 80 : 20 na poduzorke za treniranje i testiranje modela.

Rezultati istraživanja pokazali su da kompliciraniji modeli nisu povećali preciznost u predviđanju vremenskih serija. Modeli pomičnih prosjeka nadmašili su ostale modele i u početnoj implementaciji i nakon dijeljenja podataka uz najmanji *RMSE*, no sve se metode izuzev naivnog modela II mogu svrstati u efikasne i konzistentne pri kratkoročnom prognoziranju stacionarnih nizova.

U daljnjim je istraživanjima i u praktičnoj primjeni uputno koristiti druge dodatne metrike prediktivne moći, a moguće je i unaprijediti korištene modele kako bi se bolje prilagodili podacima te uključiti modele temeljene na strojnom učenju s ciljem ispitivanja mogućnosti suvremene tehnologije.

Konačno, valja napomenuti da niti jedan model nije univerzalno najbolji za prognoziranje svih vremenskih nizova, već je prognoziranje potrebno prilagoditi s obzirom na prethodno provedenu empirijsku analizu konkretnih podataka.

Popis literature

1. Bahovec, V., Dumičić, K., Erjavec, N., Čižmešija, M., Kurnoga, N., Arnerić, J., Čeh Časni, A., Jakšić, S., Sorić, P., Žmuk, B., Palić, I., Lolić, I. (2016.), *Statistika*, Zagreb: Element
2. Blažić, M. (1998.), Burzovni indeks, *Računovodstvo i financije*, 1998(1), str. 84-89.
3. Carhart, M. M. (1997.), Returns from Investing in Equity Mutual Funds 1971 to 1991, *Journal of Finance*, 50(2), 549-572.
4. Chatfield, C. (2004.), *The analysis of time series, an introduction*, Boca Raton: Chapman&Hall/CRC
5. Chen, N.F., Roll, R. i Ross, S.A. (1986.), Economic Forces and the Stock Market, *Journal of Business*, 59(3), 383-403.
6. Čižmešija, M. i Sorić, P. (2016.), *Statističke metode za poslovno upravljanje u programskom jeziku R*, Zagreb: Element
7. Dumičić, K., Bahovec, V., Čižmešija, M., Kurnoga, N., Živadinović, N., Čeh Časni, A., Jakšić, S., Palić, I., Sorić, P., Žmuk, B. (2011.), *Poslovna statistika*, Zagreb: Element
8. Engle, R.F. i Rangel, J.G. (2008.), The Spline-GARCH Model for Low-Frequency Volatility and its Global Macroeconomic Causes, *The Review of Financial Studies*, 21(3), 1187-1222.
9. Fama, E. F. (1970.), Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, *The Journal of Finance*, 25(2), 383-417.
10. Fama, E. F. i French, K. R. (1992.), The Cross-Section of Expected Stock Returns, *Journal of Finance*, 47(2), 427-465.
11. Fama, E. F. i French, K. R. (1993.), Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds, *Journal of Financial Economics*, 33(1), 3-56.
12. Fama, E. F. (1998.), Market efficiency, long-term returns, and behavioral finance, *Journal of Financial Economics*, 49(3), 283-306.
13. Fama, E. F. i French, K. R. (2004.), The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence, *Journal of Economic Perspectives*, 18(3), 25-46.
14. Groebner, D. F., Shannon, P. W. i Fry, P. C. (2018.), *Business Statistics: A Decision-Making Approach*, 10th edition, New Jersey: Pearson Education Inc.
15. Hautcoeur, P.-C. (2006. travanj), Why and how to measure stock market fluctuations? The early history of stock market indices, with special reference to French case, *Paris-jourdan Sciences Economiques*, preuzeto s:

<https://www.researchgate.net/publication/24117760> Why and how to measure stock market fluctuations The early history of stock market indices with special reference to the French case/[link/53d893430cf2e38c63317a0b/download?tp=eyJjb250ZXh0Ijpb7ImZpcnN0UGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIiwicGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIn19](https://www.researchgate.net/publication/24117760/figure/fig/53d893430cf2e38c63317a0b/download?tp=eyJjb250ZXh0Ijpb7ImZpcnN0UGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIiwicGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIn19)

16. Islam, M. R. i Nguyen, N. (2020.), Comparison of Financial Models for Stock Price Prediction, *Journal of risk and financial management*, 13(8), 181.
17. J. P. Morgan (2023., 13. prosinac), Market outlook for 2024: Slow global growth clouds forecast for equities, preuzeto 30. travnja 2024. s <https://www.jpmorgan.com/insights/global-research/outlook/market-outlook>
18. Kaminsky, G.L. i Reinhart, C.M. (1999.), The Twin Crises: The Causes of Banking and Balance-of-Payments Problems, *American Economic Review*, 89(3), 473-500.
19. Lolić, I., Matošec, M., & Sorić, P. (2024), DIY google trends indicators in social sciences: A methodological note, *Technology in society*, 102477.
20. Lolić, I. (2018.), *Mjerenje i modeliranje ekonomske neizvjesnosti s primjenom na osobnu potrošnju*, doktorski rad, Ekonomski fakultet u Zagrebu, Zagreb
21. Makridakis, S., Wheelwright, S. i Hyndman, R. J. (1998.), *Forecasting: Methods and Applications*, 2nd edition, New York: Wiley
22. Montgomery D. C., Kulahci M. i Jennings C. L. (2015.), *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting*, New York: Wiley
23. Murphy, J. J. (2007.), *Tehnička analiza financijskih tržišta: sveobuhvatni vodič za trgovinske metode i njihovu primjenu*, Poslovni dnevnik: Masmedia
24. P.C. Tetlock (2007.), Giving Content to Investor Sentiment: The Role of Media in the Stock Market, *The Journal of Finance*, 62(3), 1139-1168.
25. Rapach, D.E., Strauss, J.K. i Zhou, G. (2010.), Out-of-Sample Equity Premium Prediction: Combination Forecasts and Links to the Real Economy, *The Review of Financial Studies*, 23(2), 821–862.
26. Reddy, K. i Clinton V. (2016). Simulating Stock Prices Using Geometric Brownian Motion: Evidence from Australian Companies, *Australian accounting, business and financial journal*, 2016(10)
27. Shiller, R. J. (1981.), Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends, *American Economic Review*, 71(3), 421-436.

28. Shleifer A. i Vishny R. W. (1997.), A Survey of Corporate Governance, *The Journal of Finance*, 52(2), 737-783.
29. Solnik, B. (1974.), Why Not Diversify Internationally Rather than Domestically, *Financial Analyst Journal*, 51(1), 89-94.
30. The Guardian (2020., 12. ožujak), Wall Street and FTSE 100 plunge on worst day since 1987 – as it happened, preuzeto 20. svibnja 2024. s <https://www.theguardian.com/business/live/2020/mar/12/stock-markets-tumble-trump-europe-travel-ban-ecb-christine-lagarde-business-live>
31. Thaler, R. H. (1987.), The psychology of choice and the assumptions of economics, *Essays in Positive Economics*, University of Chicago Press
32. Toby, A. J. i Agbam, S. A. (2021.), Stochastic Forecasting of Stock Prices in Nigeria: Application of Geometric Brownian Motion Model, *International Journal of Finance*, 6(2), 1-35.
33. Wealth Management (2023., 4. prosinac), Global Insight 2024 Outlook: Europe, preuzeto 30. travnja 2024. s <https://www.rbcwealthmanagement.com/en-eu/insights/global-insight-2024-outlook-europe>
34. Wooldridge, J. M. (2016.), *Introductory Econometrics, A modern approach*, 6th edition, Nelson Education
35. Zagrebačka burza (2020.), Odluka o indeksu CROBEX – izmjena metodologije, [e-publikacija], preuzeto s: https://zse.hr/hr/indeks/365?isin=HRZB00ICBEX6&tab=stock_publisher
36. Zagrebačka burza (b.d.), CROBEX, preuzeto 22. travnja 2024. s <https://zse.hr/hr/indeks/365?isin=HRZB00ICBEX6>

Popis slika

Slika 1 Isječak izračunatih dnevnih prinosa (%).....	18
Slika 2 Dnevni prinos DAX indeksa 1.1.2010. - 31.12.2023.....	19
Slika 3 Dnevni prinos FTSE 100 indeksa 1.1.2010. - 31.12.2023.....	20
Slika 4 Dnevni prinos CAC 40 indeksa 1.1.2010. - 31.12.2023.....	20
Slika 5 Dnevni prinos IBEX 35 indeksa 1.1.2010. - 31.12.2023.....	21
Slika 6 Dnevni prinos Euro Stoxx 50 indeksa 1.1.2010. - 31.12.2023.....	21
Slika 7 Modificirani B-P grafikoni pojedinih indeksa	23
Slika 8 Dekompozicija prinosa DAX indeksa	25
Slika 9 Dekompozicija prinosa FTSE 100 indeksa	25
Slika 10 Dekompozicija prinosa CAC 40 indeksa	26
Slika 11 Dekompozicija prinosa IBEX 35 indeksa	26
Slika 12 Dekompozicija prinosa Euro Stoxx 50 indeksa.....	27
Slika 13 Ispitivanje stacionarnosti niza ADF testom.....	28
Slika 14 Analiza autokorelacijske funkcije i Ljung-Boxov test na primjeru prinosa DAX indeksa	28
Slika 15 Isječak iz koda za naivni model I kao primjer primjene prognostičkog modela u Pythonu	30
Slika 16 Isječak iz koda za računanje RMSE na primjeru naivnog modela I	30
Slika 17 Dijagram raspršenosti za ocjenu učinkovitosti naivnog modela I	32
Slika 18 Linijski dijagram stvarnih i prognostičkih vrijednosti primjenom naivnog modela II .	33
Slika 19 RMSE u ovisnosti o broju članova pomičnog prosjeka	33
Slika 20 Linijski dijagram stvarnih i prognostičkih vrijednosti primjenom MA(2).....	34
Slika 21 Dijagram raspršenosti za MA(2).....	34
Slika 22 RMSE u ovisnosti o redu modela p	34
Slika 23 Parametri AR(4) modela dobiveni metodom najmanjih kvadrata	35
Slika 24 Dijagram raspršenosti za AR(4) model.....	35
Slika 25 Dijagram raspršenosti za model Geometrijskog Brownovog gibanja.....	35
Slika 26 Konstantna prognostička vrijednost na primjeru naivnog modela (I) na poduzorku za testiranje	36

Slika 27 Linijski dijagram i dijagram rasipanja poduzorka za testiranje i prognostičkih vrijednosti za naivni model II.....	37
Slika 28 Međusobna usporedba AR(p) modela prema RMSE	37
Slika 29 Dijagram rasipanja AR(1) modela za test poduzorak.....	38
Slika 30 Dijagram raspršenosti poduzorka za testiranje modelom geometrijskog Brownovog gibanja	38
Slika 31 Usporedba RMSE inicijalno primijenjenih prognostičkih modela	39
Slika 32 Prognostički modeli uzlazno rangirani prema vrijednosti RMSE na poduzorku za testiranje	40

Popis tablica

Tablica 1 Sastav i izračun CROBEX-a na dan 22.4.2024.....	6
-----------------------------------------------------------	---



Klara Čelan

OBRAZOVANJE

2019 - 2024

Ekonomski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

Integrirani preddiplomski i diplomski studij Poslovne ekonomije, smjer **Analiza i poslovno planiranje**

Prosjek ocjena **4,98**

Kategorija 10 % najuspješnijih studenata na studiju

Stipendija Rotary kluba Zagreb (2019.), Državna stipendija (2020. - 2023.), Stipendija za izvrsnost Sveučilišta u Zagrebu (2024.)

projekti i događaji: Assisting Croatia on its way to OECD (2022.), Budi FIN (2021.), Organize Your Talk (2019., 2020.)

2021 - 2024

Institut za crkvenu glazbu Sveučilišta u Zagrebu

Program cjeloživotnog obrazovanja

2015 - 2019

5. gimnazija Zagreb

Europsko statističko natjecanje, Eurostat, 2. mjesto (2019.), mentorstvo doc. dr. sc. Ivane Lolič

Državna natjecanja: Logika i filozofija (2019.), Povijest (2018.), Hrvatski jezik (2017., 2018.), Statističko natjecanje (2019.)

Stipendija Rotary kluba Zagreb (2016. - 2019.)

2011 - 2020

Glazbeno učilište Elly Bašić

Glazbenik flautist
summa cum laude

📅 14.8.2000., Zagreb

✉ klaracelan7@gmail.com

☎ +385 98 939 8512

NAGRADE

Europsko statističko natjecanje, nagrada Eurostata

2. mjesto
2019.

Organize Your Talk, nagrada Europske komisije

2. mjesto
2020.

VJEŠTINE

Python EViews MS Office R

Engleski C1

RADNO ISKUSTVO

2020 - 2022

Demonstrator na Katedri za matematiku, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

u suradnji s izv. prof. dr. sc. Tunjom Perićem

2020 - 2022

Demonstrator na Katedri za statistiku, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

u suradnji s prof. dr. sc. Mirjanom Čižmešijom i izv. prof. dr. sc. Petrom Sorićem

2022

Demonstrator na Katedri za makroekonomiju i gospodarski razvoj, Ekonomski fakultet Sveučilišta u Zagrebu

u suradnji s izv. prof. dr. sc. Anom Andabakom