

# Analiza prediktivne sposobnosti opsijskih modela vrednovanja visokofrekventnim podacima

---

Čuljak, Maria

Professional thesis / Završni specijalistički

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Economics and Business / Sveučilište u Zagrebu, Ekonomski fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:148:662143>

Rights / Prava: [Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported/Imenovanje-Nekomercijalno-Dijeli pod istim uvjetima 3.0](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-05**



Repository / Repozitorij:

[REPEFZG - Digital Repository - Faculty of Economics & Business Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
EKONOMSKI FAKULTET

MARIA ČULJAK

ANALIZA PREDIKTIVNE SPOSOBNOSTI  
OPCIJSKIH MODELA VREDNOVANJA  
VISOKOFREKVENTNIM PODACIMA

POSLIJEDIPLOMSKI  
SPECIJALISTIČKI RAD

ZAGREB, 2019.

## **PODACI I INFORMACIJE O STUDENTU POSLIJEDIPLOMSKOG STUDIJA**

Prezime i ime \_\_\_ Maria Čuljak \_\_\_\_\_

Datum i mjesto rođenja \_\_\_ 13.05.1990., Zagreb \_\_\_\_\_

Naziv završenog fakulteta i godina diplomiranja \_ Ekonomski fakultet, 2019.

## **PODACI O POSLIJEDIPLOMSKOM SPECIJALISTIČKOM RADU**

1. Vrsta studija:           specijalistički
2. Naziv studija \_\_\_ Statističke metode za ekonomske analize i prognoziranje
3. Naslov rada \_\_\_ Analiza prediktivne sposobnosti opcijskih modela vrednovanja visokofrekventnim podacima
4. UDK (popunjava knjižnica): \_\_\_\_\_
5. Fakultet na kojem je rad obranjen \_ Ekonomski fakultet, Sveučilište u Zagrebu

## **POVJERENSTVA, OCJENA I OBRANA RADA**

1. Datum prihvaćanja teme \_\_\_ 26.03.2019.
2. Mentor: \_Izv. prof. dr. sc. Josip Arnernić \_\_\_\_\_
3. Povjerenstvo za ocjenu rada
  1. Prof. dr. sc. Nataša Erjavec
  2. Izv. prof. dr. sc. Josip Arnerić
  3. Prof. dr. sc. Mirjana Čižmešija
4. Povjerenstvo za obranu rada:
  1. Prof. dr. sc. Nataša Erjavec
  2. Izv. prof. dr. sc. Josip Arnerić
  3. Prof. dr. sc. Mirjana Čižmešija
5. Datum obrane rada: \_ 09.10.2019.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
EKONOMSKI FAKULTET

MARIA ČULJAK

ANALIZA PREDIKTIVNE SPOSOBNOSTI  
OPCIJSKIH MODELA VREDNOVANJA  
VISOKOFREKVENTNIM PODACIMA

POSLIJEDIPLOMSKI  
SPECIJALISTIČKI RAD

ZAGREB, 2019.

MARIA ČULJAK  
Ime i prezime studenta/ice

## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je poslijediplomski specijalistički rad  
(vrsta rada)  
isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu, a što pokazuju korištene bilješke i bibliografija. Izjavljujem da nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz necitiranog rada, te da nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

U Zagrebu, 15.10.2019.

Student/ica:

  
(potpis)

# Sadržaj

1	Uvod . . . . .	1
1.1	Predmet i problem istraživanja . . . . .	1
1.2	Ciljevi rada . . . . .	2
1.3	Metode istraživanja . . . . .	2
1.4	Sadržaj rada . . . . .	3
2	Prognoziranje tržišnih očekivanja pomoću cijena opcija . . . . .	4
2.1	Modeli vrednovanja opcija . . . . .	5
2.2	Breeden-Litzenbergerova formula . . . . .	7
2.3	Funkcija gustoće neutralna na rizik . . . . .	8
2.4	Funkcija gustoće u realnom svijetu . . . . .	10
3	Modeli procjene implicirane funkcije gustoće vjerojatnosti . . . . .	12
3.1	Strukturni modeli . . . . .	13
3.2	Nestrukturni modeli . . . . .	14
3.2.1	Parametarski modeli . . . . .	14
3.2.2	Polu-parametarski modeli . . . . .	18
3.2.3	Neparametarski modeli . . . . .	21
4	Izbor referentne funkcije gustoće vjerojatnosti . . . . .	24
4.1	Referentne funkcije gustoće vjerojatnosti u dosadašnjim istraživanjima . . . . .	24
4.2	Procjena realizirane funkcije gustoće vjerojatnosti . . . . .	26
4.2.1	Visokofrekventni podaci . . . . .	26
4.2.2	Izbor frekvencije uzorkovanja . . . . .	29
4.2.3	Kernelova procjena realizirane funkcije gustoće vjerojatnosti . . . . .	30
4.2.4	Izbor širine pojasa Kernelovog procjenitelja . . . . .	31
5	Metode usporedbe referentne funkcije gustoće s impliciranim funkcijama gustoće vjerojatnosti . . . . .	32
5.1	Prednosti i nedostaci dosadašnjih komparativnih analiza . . . . .	32
5.2	Metode usporedbe <i>out-of-sample</i> i utvrđivanje prediktivne sposobnosti . . . . .	34
5.2.1	Kolmogorov - Smirnov test . . . . .	34
5.2.2	Diebold - Mariano test . . . . .	39
5.3	Stabilnost parametara . . . . .	45
6	Empirijski rezultati izabranih dioničkih tržišta . . . . .	46

---

6.1	Rezultati procjena realiziranih funkcija gustoća vjerojatnosti pomoću visokofrekventnih podataka . . . . .	46
6.2	Rezultati procjena impliciranih funkcija gustoća vjerojatnosti odabranih opcijskih modela . . . . .	58
6.3	Rezultati usporedbe . . . . .	97
6.4	Ograničenja istraživanja i buduće smjernice . . . . .	99
7	Zaključak . . . . .	100
	Bibliografija . . . . .	102
	Popis slika . . . . .	106
	Popis tablica . . . . .	108
	Sažetak i ključne riječi . . . . .	109
	Summary and key words . . . . .	110
	Životopis . . . . .	111

# 1 Uvod

## 1.1 Predmet i problem istraživanja

Predmet istraživanja ovog poslijediplomskog specijalističkog rada je upotreba visokofrekventnih podataka koji se koriste kao benchmark za utvrđivanje prognostičke moći modela vrednovanja opcija. Pomoću visokofrekventnih podataka može se dobiti referentna funkcija gustoće vjerojatnosti koja bi bila benchmark za daljnju analizu. Motivacija za korištenjem visokofrekventnih podataka potaknuta je tehnološkim napretkom kod trgovinskih sustava i evidentiranjem gotovo svake realizirane transakcije. Uslijed razvoja algoritamskog trgovanja, povećanja dinamike postavljanja naloga i likvidnosti raste dominacija elektroničkog trgovanja na uređenim tržištima, kao i na multilateralnim trgovinskim i OTC platformama. Sve navedeno omogućuje rekordnu tržišnu aktivnost na visokoj frekvenciji i uz visoku preciznost koja vodi do naprednih podatkovnih skupova. Akademski i praktični interes za intradnevni podacima opaženim u vrlo kratkim intervalima vremena su tržišne strukture i proces trgovanja koji su podložni stalnim promjenama. Uvođenje elektroničkih trgovinskih platformi automatiziralo je i ubrzalo izvršenje transakcija, kao i izvještavanje o trgovini te omogućilo investitorima automatiziranje njihovih strategija, usmjeravanja i upravljanja naložima u realnom vremenu.

Glavna svrha ovog istraživanja je prognoziranje budućih kretanja sredine, varijance i drugih momenata financijske imovine. Financijske vremenske serije koje su predmet ovog istraživanja su put i call opcije na tržišne indekse CAC (Cotation Assistée en Continu), AEX (Amsterdam Exchange index), MIB (Milano Indice di Borsa) i DAX (Deutscher Aktienindex). Podaci su preuzeti iz financijske baze podataka Thomson Reuters.

Istraživanje se provodi u dvije faze. Prva faza je faza procjene impliciranih funkcija gustoće vjerojatnosti na buduću datum odnosno na datum dospijeca opcija. Druga faza je faza usporedbe dobivenih funkcija gustoće vjerojatnosti s referentnom funkcijom gustoće na temelju visokofrekventnih podataka. Predmet istraživanja su modeli korišteni za prognoziranje buduće funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik. Modeli koje koristimo su iz klase neparаметarskih, parametarskih i poluparametarskih modela vrednovanja opcija, redom: Shimko model, Mixture Log-Normal model i Edgeworth expansion model. Glavni je cilj istraživanja vrednovanje njihove prognostičke moći te izbor najprikladnijeg modela, ne samo onog koji se najbolje prilagođava podacima već istovremeno ima najveću prediktivnu sposobnost. Postoje ograničenja kod korištenja visokofrekventnih podataka kao što su nelikvidnost financijskog tržišta te samim time manjak podataka i dvojbe o izboru uzorkovanja buduću da se zahtjeva da su vremenski intervali jednako udaljeni i neprazni podskupovi koji se ne preklapaju. Ograničenja su dijelom premoštena koristeći podatke



burzovnih indeksa zapadnih razvijenijih financijskih tržišta te korištenjem programskog jezika R u obradi podataka.

Metode usporedbe referentne funkcije gustoće vjerojatnosti s procijenjenom funkcijom gustoće neutralnom na rizik rezultirat će preporukama za primjenu ne samo u akademskim istraživanjima, već i u praksi, što je posebno potrebno financijskim analitičarima i sudionicima na promatranim tržištima. Rezultati su primjenjivi i na hrvatsko tržište kapitala odnosno dioničke indekse Zagrebačke burze d.d. Kod interpretacije i primjene metodologije na hrvatsko tržište kapitala trebat će uzeti u obzir nelikvidnost i smanjen volumen trgovanja.

## 1.2 Ciljevi rada

Osnovni cilj istraživanja u okviru ovog poslijediplomskog specijalističkog rada je usporediti referentnu funkciju gustoće vjerojatnosti dobivenu visokofrekventnim podacima s procijenjenom funkcijom gustoće neutralnom na rizik dobivenom pomoću modela vrednovanja opcija. Nadalje, cilj je predstaviti model koji najbolje opisuje i predviđa kretanje korištenih financijskih vremenskih serija pomoću mjera prognostičke točnosti. Prije svega analizirat će se karakteristike tržišnih indeksa te će ispitati svojstva promatranih vremenskih serija. Uzorkovat će se visokofrekventni podaci na izabrane datume dospijeca i generirati referentnu funkciju gustoće vjerojatnosti. Na taj se način intradnevni podaci koriste u procjeni čitave funkcije gustoće vjerojatnosti na određeni dan trgovanja. Predstavit će se funkcije gustoće vjerojatnosti na temelju visokofrekventnih podataka kao benchmark za prognostičke modele. Time će se analizirati prognostičku moć modela za vrednovanje opcija. Naposljetku, se izabire najbolji opcijski model prema prediktivnoj sposobnosti.

## 1.3 Metode istraživanja

U okviru istraživanja ovog poslijediplomskog specijalističkog rada koristit će se brojne metode: deskriptivna i inferencijalna statistika u najširem smislu, procjena funkcije gustoće pomoću Kernela (funkcija gustoće vjerojatnosti), procjena implicirane funkcije gustoće neutralne na rizik, metode prognoziranja financijskih serija pomoću opcijskih modela - Shimko model, Mixture Log-Normal model i Edgeworth expansion model, ekonometrijska analiza te metode usporedbe prognostičkih modela prema referentnoj funkciji gustoće vjerojatnosti.

Planirana istraživanja su provediva s obzirom na postojeću vrlo bogatu statističku podlogu visokofrekventnih podataka korištene baze Thomson Reuters i rezultate ekonometrijskih istraživanja koja su se provodila u svrhu procjene prognostičkih opcijskih modela.

## 1.4 Sadržaj rada

Nakon uvoda predstavljenog istraživanja ovog poslijediplomskog specijalističkog rada slijedi poglavlje koje daje osnove o prognoziranju tržišnih očekivanja pomoću cijena opcija. Predstavljene su najzastupljeniji modeli vrednovanja opcija, Breeden-Litzenbergerova formula te su definirane funkcija gustoće neutralna na rizik i funkcija gustoće u realnom svijetu. Sljedeće poglavlje daje uvid u modele procjene implicirane funkcije gustoće vjerojatnosti te njihovu podjelu. Posebno su opisani tipovi nestrukturiranih modela, parametarski i neparametarski modeli. Četvrto poglavlje se bavi izborom referentne funkcije gustoće vjerojatnosti. Dan je pregled dosadašnjih istraživanja te pripadnih referentnih funkcija gustoće vjerojatnosti. U ovom poglavlju je naglasak na procjenu realizirane funkcije gustoće vjerojatnosti pomoću visokofrekventnih podataka stoga je dan uvid u teoriju viskofrekventnih podataka i izbora frekvencije uzorkovanja. Također je dan uvid u teoriju Kernelove procjene realizirane funkcije gustoće vjerojatnosti i izbora širine pojasa Kernelovog procjenitelja. Peto poglavlje je posvećeno metodama usporedbe referentne funkcije gustoće s impliciranim funkcijama gustoće vjerojatnosti. Dane su prednosti i nedostaci dosadašnjih komparativnih analiza. Metode usporedbe out-of-sample i utvrđivanje prediktivne sposobnosti su predstavljene kroz dva testa: Kolmogorov-Smirnov test i Diebold-Mariano test. Peto poglavlje se zaključuje s testiranjem stabilnosti parametara. Šesto poglavlje je najvažnije u kojem su interpretirani empirijski rezultati izabranih dioničkih tržišta. Prvo je dan uvid u rezultate procjena realiziranih funkcija gustoća vjerojatnosti pomoću visokofrekventnih podataka, a zatim rezultate procjena impliciranih funkcija gustoća vjerojatnosti odabranih opsijskih modela. Slijede rezultati usporedbe navedenih rezultata. Zaključno je dan pregled ograničenja te buduće smjernice istraživanja. Ova poslijediplomski specijalistički rad se završava zaključkom.

## 2 Prognoziranje tržišnih očekivanja pomoću cijena opcija

U ovom poglavlju će se približiti problematika i osnove prognoziranja financijskih vremenskih serija pomoću cijena opcija. Dosadašnjim istraživanjima je empirijski pokazano kako cijene financijskih instrumenata pružaju informacije o budućim očekivanjima cijena te ostalim momentima (Bouden, 2007). Cijene tržišnih opcija nam daju uvid u očekivanu vrijednost osnovne imovine pod pretpostavkom o neutralnosti rizika što čini cijene opcija pogodnima za procjenu implicirane funkcije gustoće vjerojatnosti. Za sudionike na tržištu kapitala, privlačnost korištenja implicirane funkcije gustoće vjerojatnosti oslanja se na sposobnost procjene vjerojatnosti kod niza budućih događaja, koristeći percepciju tržišta u određenom intervalu vremena. Analitičari tržišta kapitala te donositelji odluka koriste ovaj izvor informacija pri analizi tržišnog raspoloženja, nesigurnosti i scenarija ekstremnih događaja, posebno za kamatne stope i tečajeve (Bauwens et. al., 2008). Ovaj poslijediplomski specijalistički rad se koncentrira na put i call opcije tržišnih indeksa. Poznato je da Black-Scholesov model ima nekoliko ograničenja, jer pretpostavlja da se cijena razvija prema geometrijskom Brownovom gibanju (GBM) s konstantnim očekivanim prinosom i konstantnom varijancom. Varijanca je konstantna do dospjeća, što zanemaruje fenomene poput vremenski promjenjive volatilnosti i kao takva iskrivljuje vjerojatnosti za ekstremne scenarije. Za rješavanje tih problema, predložene su različite metode za ekstrakciju funkcija gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik (RND) na temelju cijena opcija i provedeno je nekoliko studija kako bi se ispitala robusnost tih procjena i njihova moć informiranja (Santos, 2011).

U ovom radu uspoređujemo tri metode ekstrahiranja RND-ova iz cijena europskih opcija na burzovne indekse.

## 2.1 Modeli vrednovanja opcija

Opcije se mogu koristiti kao poluga (*engl. leverage*) za povećanje izloženosti ulagača prema cijeni temeljnog instrumenta ili za zaštitu (*engl. hedging*) od promjene cijene temeljnog instrumenta kako bi se smanjili gubici prilikom pada vrijednosti. U ovom slučaju je opcija takva da je u trenutku  $T$  imamo pravo kupiti ili prodati po cijeni  $X$ . Razlikujemo dvije vrste opcija: opcije kupnje (*engl. call option*) i opcije prodaje (*engl. put opcija*). Call opcija daje njenom kupcu, u zamjenu za plaćenu premiju, pravo kupnje od prodavača, opcije ugovorenih vrijednosnih papira ili drugog financijskog instrumenta po izvršnoj cijeni na određeni dan što je europski tip opcije. Kod američkog tipa opcije daje njenom kupcu pravo kupnje od prodavača kroz određeno razdoblje do istjecanja njena važenja. Pravo iz opcije iskoristit će njezin kupac u slučaju da je tržišna cijena vrijednosnog papira veća od izvršne cijene. Na taj način vlasnik opcije može ostvariti kapitalni dobitak razlikom između veće tržišne cijene vrijednosnog papira kojeg stječe uz manju izvršnu cijenu. S druge strane, prodavatelj opcije pretrpjet će određeni gubitak. Put opcija daje njenom vlasniku pravo prodaje ugovorenih vrijednosnih papira ili neke druge vezane imovine po izvršnoj cijeni na određeni dan ili tijekom određenog razdoblja. Pravo prodaje vezane imovine (vrijednosnih papira) stječe kupac put opcije u zamjenu za premiju koju plaća prodavaču. Ne radi se o obavezi jer će kupac opcije iskoristiti svoje pravo prodaje u slučaju ako cijena vezane imovine padne ispod izvršne cijene. Na taj će način kupac opcije ostvariti određeni kapitalni dobitak od prodaje vezane imovine (vrijednosnih papira) po cijeni višoj od tekuće tržišne cijene (Jondeau et. al, 2007).

Budući da je u ovom poslijediplomskom specijalističkom radu naglasak na europski tip opcije objasniti će se ukratko osnovne vrste opcija. Europska opcija kupnje kupcu daje pravo na kupnju predmetne imovine za određenu cijenu (cijenu izvršenja) na određeni datum (dospijeće), dok europska opcija prodaje daje kupcu pravo prodati odnosnu imovinu za određenu cijenu na određeni datum. Uz pretpostavku da nema transakcijskih troškova, možemo predočiti isplatu europske opcije po dospijeću putem sljedećih formula, pri čemu je  $X$  cijena izvršenja opcije (*engl. strike price*),  $S_T$  je cijena promatrane financijske imovine ili instrumenta na datum dospijeća  $T$ :

$$C(S_T, X) = \max(S_T - X; 0) \quad (2.1)$$

$$P(S_T, X) = \max(X - S_T; 0) \quad (2.2)$$

Najpoznatiji i najviše upotrebljavani model za vrednovanje opcija je Black and Scholes model. Njegova pretpostavka je da cijena opcije ima log-normalnu distribuciju te se kreće u skladu s Brownovom gibanju (stohastičkom procesom) s konstantnim očekivanim prinosom i konstantnom volatilnošću (Jondeau et. al., 2007):

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t, \quad (2.3)$$

---

pri čemu je  $S_t$  cijena temeljne imovine u vremenu  $t$ ,  $dS_t$  predstavlja promjenu cijene,  $\mu$  je očekivani prinos,  $\sigma$  je standardna devijacija procesa i  $dW_t$  su promjene Wienerovog procesa s nezavisnim i stacionarnim prirastima (Santos, 2011).

## 2.2 Breeden-Litzenbergerova formula

U ovom poglavlju ćemo pokazati kako se funkcija gustoće vjerojatnosti neutralna na rizik može izvesti pomoću druge derivacije s obzirom na cijene izvršenja  $X$  (*engl. strikes*) (Breeden and Litzenberger, 1978). Neka je  $T$  datum do dospijea,  $\tau$  vrijeme preostalo do dospijea,  $S_t$  cijena temeljne imovine u trenutku  $t$  i  $C(X, T)$  cijena opcije kupnje, tada se definira cijena potraživanja u smislu europskog tipa opcije kupnje  $G(S_t, T)$ . Kako portfelj na kupnju daje primjerice isplatu od 1 euro ako se  $S_t$  ostvari u periodu do  $T$ , onda je cijena portfelja kupnje  $G(S_t, T; \Delta S_t)$ . Dakle, sa pomakom  $\Delta S_t$  i cijenama kupnje  $C(X, T)$ ,  $G(S_t, T; \Delta S_t)$  imamo:

$$\begin{aligned} \frac{G(S_t, T; \Delta S_t)}{\Delta S_t} &= \\ &= \frac{[C(S_t + \Delta S_t, T)] - C(S_t, T) - [C(S_t, T) - C(S_t - \Delta S_t, T)]}{(\Delta S_t)^2}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

te kada pomak  $\Delta S_t$  ide ka 0 imamo:

$$\lim_{\Delta S_t \rightarrow 0} \frac{G(S_t, T; \Delta S_t)}{\Delta S_t} = \frac{\partial^2 C(X, T)}{\partial X^2} \Big|_{X=S_t} \quad (2.5)$$

$S_t$  ima funkciju gustoće vjerojatnosti. Funkcija vrednovanja  $G(S_t, T)$  je analogna funkciji gustoće vjerojatnosti u tom slučaju kao što se vidi iz (2.5). (2.4) daje funkciju vrednovanja u diskretnom slučaju, dok (2.5) daje funkciju vrednovanja za neprekidan  $S_t$  uz pretpostavku da je  $C$  dva puta diferencijabilna.

## 2.3 Funkcija gustoće neutralna na rizik

Pokazano je prema (Breedon and Litzenberger, 1978) da jedinstvena funkcija gustoće vjerojatnosti neutralna na rizik  $f$  za cijenu temeljne imovine  $S_T$  može biti izvedena za cijenu opcije na kupnju  $C(X)$  kada je ugovor procijenjen za sve cijene izvršenja  $X$  te gdje nema arbitraže. Funkcija gustoće vjerojatnosti neutralna na rizik (RND) je dana:

$$f(X) = e^{r\tau} \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \quad (2.6)$$

i

$$C(X) = e^{-r\tau} \int_X^\infty (x - X) f(x) dx \quad (2.7)$$

pri čemu je  $r$  nerizična (*engl. risk free*) kamata i  $\tau$  je vrijeme preostalo do dospijeca. Cijena opcije na kupnju predstavlja vrijednost očekivanja neutralnog na rizik isplate na datum dospijeca  $T$ . Neka  $Q$  predstavlja mjeru neutralnu na rizik, tada:

$$C(X) = e^{-r\tau} \mathbb{E}^Q[\max(S_T - X, 0)]. \quad (2.8)$$

Nadalje, procijenjena cijena  $F$  u vremenu  $T$  je očekivanje neutralno na rizik od  $S_T$ :

$$F = \mathbb{E}^Q[S_T]. \quad (2.9)$$

Ako pretpostavimo da je kamata konstantna i da nema isplate dividende, onda je procijenjena cijena i buduća cijena.

U nastavku se daje zatvoreni oblik (*engl. closed form*) funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik pod pretpostavkom Black and Scholes modela. Black and Scholes jednadžba vrednovanja opcije kupnje je dana:

$$C(X, T) = S_0 \phi(d_1) - e^{-rT} X \phi(d_2), \quad (2.10)$$

pri čemu je:

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r - \frac{\sigma_T^2}{2}\right)T}{\sigma_T \sqrt{T}} \quad (2.11)$$

te je  $d_1 = d_2 + \sigma_T \sqrt{T}$ ,  $r_T = -\frac{\ln(e^{-rT})}{T}$  je prinos do dospijea na nerizične obveznice i  $\sigma_T^2 = \frac{\text{Var}(\ln S_T)}{T}$  je prosječna varijanca od  $\ln(S)$ .  $S_0$  je trenutna vrijednost temeljne imovine i  $\phi(d)$  je standardna normalna funkcija distribucije vjerojatnosti.

Kada dva puta deriviramo (2.10) po cijeni izvršenja  $X$ , onda:

$$\frac{G(S, T)}{dS_T} = \frac{e^{-rT}}{M_T \sigma_T \sqrt{T}} \Phi(d_2(X = M_T)), \quad (2.12)$$

pri čemu je  $\Phi(d)$  standardna normalna funkcija gustoće vjerojatnosti.



## 2.4 Funkcija gustoće u realnom svijetu

U ovom poglavlju uključujemo i parametar rizika koji je definiran ponašanjem ulaga-  
telja odnosno njihovoj nesigurnosti prema budućim cijenama i odnosu prema tržišnom  
portfelju. Nakon što postavimo uvjete rizika, moguće je izvesti transformaciju gustoće  
vjerojatnosti neutralne na rizik  $f$  u funkciju gustoće vjerojatnosti u realnom svijetu  
 $\tilde{f}$ . Postoje dvije transformacije.

Neka je  $M(S_T)$  stohastički proces parametra diskontiranja odnosno Kernel procjena  
za isplatu u vremenu  $T$ . Prema pretpostavkama (Ait-Sahalia and Lo, 2000), sto-  
hastički proces parametra diskontiranja je proporcionalan funkciji korisnosti:

$$M(x) = \lambda \frac{dv}{dx}, \quad (2.13)$$

pri čemu je  $\lambda$  samo pozitivna konstanta i  $v$  funkcija korisnosti. Cijene europskih opcija  
su u realnom svijetu diskontirane. Neka  $W$  predstavlja mjeru koja nije neutralna  
na rizik odnosno mjera realnog svijeta, tada se cijena europske opcije kupnje može  
zapisati kao:

$$C(X) = \mathbb{E}^W[M(S_T) \max(S_T - X, 0)] = \int_X^\infty M(x)(x - X)\tilde{f}(x)dx. \quad (2.14)$$

pri čemu je  $\tilde{f}$  funkcija gustoće vjerojatnosti u realnom svijetu (Liu et. al., 2005).

Iz (2.7) i (2.14) slijedi:

$$M(x) = e^{-rT} \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)}. \quad (2.15)$$

pri čemu je  $f$  funkcija gustoće vjerojatnosti neutralna na rizik, a  $\tilde{f}$  funkcija gustoće  
vjerojatnosti u realnom svijetu. Iz (2.13) i (2.15) je jasno da su funkcija gustoće  
vjerojatnosti neutralna na rizik  $f$ , funkcija gustoće vjerojatnosti u realnom svijetu  $\tilde{f}$   
i funkcija korisnosti  $v$  povezane sljedećim izrazom:

$$\tilde{f} = \frac{f(x)/v'(x)}{\int_0^\infty f(y)/v'(y)dy}. \quad (2.16)$$

Druga transformacija koristi kalibracijsku funkciju nedefinirane gustoće (Bunn, 1984).  
 $f(x)$  je funkcija gustoće vjerojatnosti neutralna na rizik od  $S_T$  te je  $F(x)$  kumulativna

funkcija distribucije vjerojatnosti od  $S_T$ , pri čemu je  $S_T$  cijena promatranog financijskog instrumenta na datum dospjeća  $T$ . Definira se slučajna varijabla  $U = F(S_T)$ . Neka je kalibracijska funkcija  $C(U)$  kumulativna funkcija distribucije vjerojatnosti u realnom svijetu od slučajne varijable  $U$ . Tada za vjerojatnosti u realnom svijetu vrijedi:

$$\tilde{F}(x) = \mathbb{P}(S_T \leq x) = \mathbb{P}(F(S_T) \leq F(x)) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = C(F(x)). \quad (2.17)$$

Time je pokazano što vrijedi za kumulativnu funkciju distribucije vjerojatnosti u realnom svijetu od  $S_T$ .

Sada slijedi da je kumulativna funkcija distribucije vjerojatnosti u realnom svijetu od  $S_T$ :

$$\tilde{F}(x) = C(F(x)). \quad (2.18)$$

Stoga je funkcija gustoće vjerojatnosti u realnom svijetu dana sa:

$$\tilde{f}(x) = \frac{d}{dx} C(F(x)) = \frac{dC}{dF} \frac{dF}{dx} = \frac{dC}{dF} f(x). \quad (2.19)$$

Transformacije su ekvivalentne kada  $\frac{dF}{dC}$  predstavlja marginalnu funkciju korisnosti  $v'$ .

### 3 Modeli procjene implicirane funkcije gustoće vjerojatnosti

U ovom poglavlju će se dati pregled metoda vrednovanja opcija koje umanjuju ograničenja Black and Scholes modela. Unatoč tome što je najpoznatiji i najkorišteniji model, Black and Scholes model pretpostavlja log-normalnu distribuciju koja nije u praksi uvijek primjenjiva. Stoga je potrebno istražiti pomnije druge modele koji se mogu primijeniti u praksi. U ovom poglavlju se daje uvid i u modele korištene u istraživanju ovog poslijediplomskog specijalističkog rada - Shimko model, Mixture Log-Normal model i Edgeworth expansion model. Prema (Jondeau et al., 2006) alternativni modeli vrednovanja opcija se dijele u dvije kategorije: strukturni i nestrukturni. Strukturni modeli pretpostavljaju specifičnu dinamiku cijene ili volatilnosti. Nestrukturni modeli dozvoljavaju procjenu funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik (RND) bez pretpostavki o cijeni ili volatilnosti temeljne imovine. Nestrukturni modeli se dijele u tri kategorije: parametarski, polu-parametarski i neparametarski modeli. Parametarski modeli pretpostavljaju oblik funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik bez prethodnih pretpostavki o dinamici cijene temeljne imovine. Polu-parametarski modeli sugeriraju aproksimaciju prave funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik. Neparametarski modeli ne pretpostavljaju oblik funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik.

### 3.1 Strukturni modeli

Kod kategorije strukturnih modela najreprezentativniji je stohastički difuzijski model. To je stohastički model koji pretpostavlja da je temeljna imovina opcije također stohastički proces, pri čemu je  $S_t$  log-normalan difuzijski proces sa skokom jednak zbroju geometrijskog Brownovog gibanja i Poissonovog difuzijskog procesa sa skokom (Malz, 1996). Cijena stohastičkog procesa je dana sa:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + k S_t dq_t \quad (3.1)$$

pri čemu je  $q_t$  varijabla Poissonove distribucije i  $k$  parametar skoka. Prema (Malz, 1996) pretpostavlja se da do dospijeća opcije će biti jedan skok konstantne dimenzije što rezultira sa sljedećim izrazima za cijene opcija kupnje i prodaje:

$$C = (1 - \lambda T) C_{BS}(S_t, T, K, \sigma, r, r^* + \lambda k) + (\lambda T) C_{BS}(S_t(1+k), T, K, \sigma, r, r^* + \lambda k) \quad (3.2)$$

$$P = (1 - \lambda T) P_{BS}(S_t, T, K, \sigma, r, r^* + \lambda k) + (\lambda T) C_{BS}(S_t(1+k), T, K, \sigma, r, r^* + \lambda k) \quad (3.3)$$

pri čemu je  $\lambda$  parametar prosječne pojave skoka,  $(1 - \lambda T)$  vjerojatnost skoka prije dospijeća.  $C_{BS}$  i  $P_{BS}$  su Black and Scholes formule vrednovanja cijena opcija kupnje i prodaje. Nakon što se procijene parametri modela koriste se u funkciji gustoće vjerojatnosti kako bi se dobila funkcija gustoće vjerojatnosti neutralna na rizik.

## 3.2 Nestrukturni modeli

### 3.2.1 Parametarski modeli

Model se smatra parametarskim ako daje funkciju gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik bez pretpostavki o dinamici cijene ili volatilnosti. Jedan od osnovnih modela ovog tipa (korištenog i u ovom poslijediplomskom specijalističkom radu) je Mixture Log-Normal model (odnosno linearna kombinacija dva log-normalnih modela). Ovaj model pretpostavlja funkcionalni oblik funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik koja prati slučajni proces cijene temeljne imovine opcije. Na taj način dobivamo parametre distribucije minimizirajući razliku između opaženih cijena opcija te procijenjenih na temelju parametarskog modela. Ovim postupkom je jasno kako je model puno fleksibilniji od Black and Scholes modela uspijevajući dobiti i ostale momente kao što su asimetrija (*engl. skewness*) i zaobljenost (*engl. kurtosis*) temeljne distribucije. MLN model polazi od jednadžbi pomoću kojih se vrednuju cijene opcija kupnje i opcija prodaje:

$$C_0(X, T) = e^{-rT} \int_X^\infty q(S_t)(S_t - X) dS_t \quad (3.4)$$

$$P_0(X, T) = e^{-rT} \int_X^\infty q(S_t)(X - S_t) dS_t \quad (3.5)$$

Pri čemu je  $X$  cijena izvršenja,  $T$  datum dospijea,  $S_t$  cijena promatranog financijskog instrumenta u trenutku  $t$  i  $r$  nerizična kamatna stopa. Prednost ovog modela je što se može pretpostaviti bilo koji funkcionalni oblik funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik  $q(S_t)$ . Parametri se procjenjuju tako da se minimizira razlika između cijena dobivenih MLN modelom i stvarno opaženih tržišnih cijena (Bahra, 1997). Pretpostavlja se da je distribucija cijene temeljne imovine približno log-normalna te posljedično se koristi ponderirani zbroj log-normalnih funkcija gustoće:

$$q(S_t) = \sum_{i=1}^k [w_i L(\alpha_i, \beta_i, S_t)] \quad (3.6)$$

pri čemu je  $L(\alpha_i, \beta_i, S_t)$ ,  $i$ -ta log-normalna distribucija s parametrima  $\alpha_i$  i  $\beta_i$ . Slijede izrazi za navedene parametre i  $L$  koja je log-normalna funkcija. Takvih funkcija može biti  $k$ . U slučaju kada je  $k = 2$  potrebno je procijeniti 5 parametara:

$$L(\alpha_i, \beta_i, S_t) = \frac{1}{S_t \beta_i \sqrt{2\pi}} e^{[-(\ln(S_t) - \alpha_i)^2 / 2\beta_i^2]} \quad (3.7)$$

$$\alpha_i = \ln(S_t) + (\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)(T - t) \quad (3.8)$$

$$\beta_i = \sigma_i\sqrt{(T - t)} \quad (3.9)$$

pri čemu je  $\theta$  vektor nepoznatih parametara  $\alpha_i, \beta_i$ , za  $i = 1, \dots, k$ .  $\sigma_i$ , za  $i = 1, \dots, k$  se izvodi na temelju procijenjenog parametra  $\beta$  i  $\mu_i$ , za  $i = 1, \dots, k$  se izvodi na temelju procijenjenog parametra  $\alpha$ . Za vrijednost pondera  $w_i$  vrijede nenegativnost i normiranost jer se radi o linearnoj kombinaciji  $k$  mogućih log-normalnih funkcija:  $w_i \geq 0$ , za  $i = 1, \dots, k$  i  $\sum_{i=1}^k w_i = 1$ .  $q$  je kombinacija log-normalnih funkcija gustoće vjerojatnosti.

Bahra je procjenjivao funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik koristeći europske opcije na LIFFE dionički indeks, LIFFE kamatne opcije i Philadelphia Stock EXCHANGE tečajne opcije koristeći kombinaciju dvije nezavisne log-normalne distribucije. U praktičnim se primjenama najčešće koristi kombinacija dviju log-normalnih distribucija. Svaka kombinacija s više od dvije funkcije rezultirat će problemom preterminiranosti (*engl. overfitted*) zbog velikog broja parametara. Budući da ponekad nema dovoljno podataka za obradu stvaraju se i ograničenja na broj parametara za procjenu.

Sada se proširuju i izrazi za europske opcije kupnje i prodaje dane (3.4) i (3.5), za svaku cijenu izvršenja  $X_i$  i vrijeme dospijeca  $\tau = (T - t)$ :

$$C(X_i, \tau) = e^{-r\tau} \int_X^\infty (S_t - X) \sum_{i=1}^k w_i L(\alpha_i, \beta_i, S_t) dS_t \quad (3.10)$$

$$C(X_i, \tau) = e^{-r\tau} \sum_{i=1}^k w_i \int_X^\infty (S_t - X) L(\alpha_i, \beta_i, S_t) dS_t \quad (3.11)$$

Prema (Jondeau et al., 2006) izraz (3.11) se može prema zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} C(X_i, \tau) &= e^{-r\tau} \sum_{i=1}^k w_i e^{\alpha_i + \frac{1}{2}\beta_i^2} \Phi\left(\frac{-\ln(X) + \alpha_i + \beta_i^2}{\beta_i}\right) \\ &= -e^{-r\tau} X \sum_{i=1}^k \Phi\left(\frac{-\ln(X) - \alpha_i}{\beta_i}\right) \end{aligned}$$

Koristeći kombinaciju dvije log-normalne distribucije dobivamo izraz za europsku opciju kupnje (Bahra, 1997):

$$C(X, \tau) = e^{-r\tau} w [e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} \Phi(d_1) - X\Phi(d_2)] + (1 - w) [e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} \Phi(d_3) - X\Phi(d_4)]$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-\ln(X) + \alpha_1 + \beta_1^2}{\beta_1} \\ d_2 &= d_1 - \beta_1 \\ d_3 &= \frac{-\ln(X) + \alpha_2 + \beta_2^2}{\beta_2} \\ d_4 &= d_3 - \beta_2 \end{aligned}$$

pri čemu je  $\Phi$  standardna normalna kumulativna funkcija distribucije vjerojatnosti. Za europsku opciju na prodaju imamo sljedeći izraz (Bahra, 1997):

$$P(X, \tau) = e^{-r\tau} w [-e^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} \Phi(-d_1) - X\Phi(-d_2)] + (1 - w) [-e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} \Phi(-d_3) - X\Phi(-d_4)]$$

Kako bi se procijenili parametri implicirane funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik potrebno je riješiti problem minimizacije s obzirom na vektor  $\theta$ :

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^n [C_i(X_i, \tau) - \tilde{C}_i]^2 + \sum_{i=1}^n [P_i(X_i, \tau) - \tilde{P}_i]^2 + [we^{\alpha_1 + \frac{1}{2}\beta_1^2} + (1 - w)e^{\alpha_2 + \frac{1}{2}\beta_2^2} - e^{r\tau}S]$$

prva dva dijela optimizacijskog problema se referira na zbroj kvadrata odstupanja između cijena opcija procijenjenih pomoću MLN modela i opaženih tržišnih cijena kupnje  $\tilde{C}$  i prodaje  $\tilde{P}$ . Opcije kupnje i prodaje u optimizacijskom problemu mogu biti uzete u obzir jer prate istu distribuciju na osnovu njihovog pariteta *engl. call-put parity*. Treći dio optimizacijskog problema minimizira razliku zajedničkog očekivanja dvaju log-normalnih distribucija i buduće cijene zbog uvjeta arbitraže. Nakon što se procijene parametri  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  i  $w$  se iskoriste u (3.6) kako bi se dobila funkcija gustoće vjerojatnosti neutralna na rizik na budući datum dospijea  $T$ .

Navedeni optimizacijski problem ima ograničenja poput simetrije između funkcija gustoća jer mnogi vektori parametara mogu se vezati na istu distribuciju. To rezultira numerički nestabilnom optimizacijom koji može završiti u beskonačnoj petlji. U dosadašnjoj literaturi (Jondeau et al., 2006) predložena je primjena  $\beta_1 > \beta_2$  kako bi se izbjegao problem simetrije jer bi prva funkcija gustoće imala veću standardnu devijaciju od druge.

Ovaj model je korišten za opcije CAC (Cotation Assistée en Continu), AEX (Amsterdam Exchange index), MIB (Milano Indice di Borsa) i DAX (Deutscher Aktienindex). U ovom poslijediplomskom specijalističkom radu rezultati se iznose u potpoglavlju 6.2.



### 3.2.2 Polu-parametarski modeli

U ovom dijelu se daje pregled modela Edgeworth ekspanzije (Jarrow and Rudd, 1982). Ideja modela jest uzeti standardnu devijaciju na osnovu funkcije gustoće log-normalne distribucije vjerojatnosti  $q(S_T|\theta)$ . Konstrukcija modela EE je konceptualno slična razvoju Taylorovog reda ali se koristi za funkcije gustoće. Kod konvencionalnoga razvoja Taylorovog reda, funkcija je aproksimirana polinomom oko dane točke. U ovom slučaju, nepoznata funkcija gustoće neutralna na rizik je aproksimirana razvojem oko log-normalne distribucije. Vidljiva prednost ovog pristupa jest taj da aproksimacija, uključujući parametre koji mogu biti varijabilni, dozvoljava generiranje općenitih funkcija.

$Q$  je kumulativna funkcija distribucije slučajne varijable  $S_T$  i neka je  $q$  funkcija gustoće vjerojatnosti. Karakteristična funkcija od  $S$  je  $\phi_Q(u) = \int e^{isu} q(s) ds$ . Ako momenti od  $S_T$  postoje do reda  $n$ , onda postoje kumulanti distribucije  $Q$ , oznaka  $K_{Q,j}$ :

$$\log(\phi_Q(u)) = \sum_{j=1}^{n-1} K_{Q,j} \frac{(iu)^j}{j!} + o(u^{n-1})$$

Ako je karakteristična funkcija  $\phi_Q$  poznata, onda koristeći razvoj logaritma oko  $u = 0$  moguće je dobiti kumulante. Pri čemu je  $u$  varijabla karakteristične funkcije od  $S$ ,  $i$  je imaginarna jedinica,  $n$  je broj momenata od  $S_T$  i  $j$  je indeks po kojem zbrajamo do momenta  $n$ . Slijedi veza između prva četiri momenta i kumulanta:  $K_{Q,1} = \mathbb{E}[S_T]$ ,  $K_{Q,2} = \mathbb{V}[S_T]$ ,  $K_{Q,3} = \mathbb{E}[(S_T - \mathbb{E}[S_T])^3]$ ,  $K_{Q,4} = \mathbb{E}[(S_T - \mathbb{E}[S_T])^4] - 3\mathbb{V}[S_T]^2$ . Dakle, ako poznamo prva četiri kumulanta, onda će nam biti i poznata prva četiri momenta distribucije odnosno očekivanje, varijanca, asimetrija i zaobljenost.

Pokazano je da četvrti red EE modela (Jarrow and Rudd, 1982) za pravu distribuciju vjerojatnosti  $Q$  oko log-normalne kumulativne funkcije distribucije  $L$  može biti eksplicitno dana uz pretpostavku da je prvi moment aproksimativne funkcije gustoće i prave funkcije gustoće jednak tj.  $K_{Q,1} = K_{L,1}$ .

$$q(s) = l(s) + \frac{K_{Q,2} - K_{L,2}}{2!} \frac{d^2 l(s)}{ds^2} - \frac{K_{Q,3} - K_{L,3}}{3!} \frac{d^3 l(s)}{ds^3} + \frac{(K_{Q,4} - K_{L,4}) + 3(K_{Q,2} - K_{L,2})^2}{4!} \frac{d^4 l(s)}{ds^4} + \epsilon(s)$$

Kao što je prije navedeno razvoj izraza je vrlo sličan Taylorovom razvoju. Dijelovi razvoja su u skladu s prilagodbama varijance, asimetrije i zaobljenosti. Pomoću ovog

izraza odnosno aproksimirane funkcije gustoće cijena europske opcije kupnje uz cijenu izvršenja  $X$  može biti aproksimirana sa:

$$\begin{aligned}
 C(Q) &= e^{-r\tau} \int_X^\infty (S_T - X)q(S_T)dS_T \\
 &\approx e^{-r\tau} \int_X^\infty (S_T - X)l(S_T)dS_T \\
 &+ e^{-r\tau} \frac{K_{Q,2} - K_{L,2}}{2!} \int_X^\infty (S_T - X) \frac{d^2l(S_T)}{dS_T^2} dS_T \\
 &- e^{-r\tau} \frac{K_{Q,3} - K_{L,3}}{3!} \int_X^\infty (S_T - X) \frac{d^3l(S_T)}{dS_T^3} dS_T \\
 &+ e^{-r\tau} \frac{(K_{Q,4} - K_{L,4}) + 3(K_{Q,2} - K_{L,2})^2}{4!} \int_X^\infty (S_T - X) \frac{d^4l(S_T)}{dS_T^4} dS_T
 \end{aligned}$$

Izraz za europsku opciju kupnje možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned}
 C(Q) \approx C(L) &+ e^{-r\tau} \frac{K_{Q,2} - K_{L,2}}{2!} l(X) - e^{-r\tau} \frac{K_{Q,3} - K_{L,3}}{3!} \frac{dl(X)}{dS_T} \\
 &+ e^{-r\tau} \frac{(K_{Q,4} - K_{L,4}) + 3(K_{Q,2} - K_{L,2})^2}{4!} \frac{d^2l(X)}{dS_T^2}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Za log-normalnu funkciju gustoće prvi kumulanti su dani sa:

$$\begin{aligned}
 K_{L,1} &= S_t e^{r\tau} \\
 K_{L,2} &= [K_{L,1}\vartheta]^2 \\
 K_{L,3} &= [K_{L,1}\vartheta]^3(3\vartheta + \vartheta^3) \\
 K_{L,4} &= [K_{L,1}\vartheta]^4(16\vartheta^2 + 15\vartheta^4 + 6\vartheta^6 + \vartheta^8),
 \end{aligned}$$

pri čemu je  $\vartheta = (e^{\sigma^2\tau} - 1)^{1/2}$ , a prva relacija slijedi iz procjene uz pretpostavku neutralnosti na rizik.

Pokazano je da se problem multikolinearnosti između drugog i četvrtog momenta rješava pretpostavkom ekvivalencije  $K_{L,2} = K_{Q,2}$  (Jarrow and Rudd, 1982). Preostali kumulanti  $K_{Q,3}$  i  $K_{Q,4}$  se ne procjenjuju nego se dobiju procjenom standardizirane asimetrije i zaobljenosti:

$$\gamma_{Q,1} = \frac{K_{Q,3}}{K_{Q,3}^{3/2}} = 3\vartheta + \vartheta^3$$

$$\gamma_{Q,2} = \frac{K_{Q,4}}{K_{Q,4}^2} = 16\vartheta^2 + 15\vartheta^4 + 6\vartheta^6 + \vartheta^8.$$

Ovi izrazi vrijede za  $i$  za funkciju gustoće log-normalne distribucije. Sada se asimetrija i zaobljenost za log-normalnu funkciju gustoće mogu lako dobiti iz navedenih kumulanti.

Slijedi konačan izraz za europsku cijenu opcije kupnje uz pretpostavku ekvivalencije drugog kumulanta aproksimativne i prave distribucije:

$$C(Q) \approx C(L) + e^{-r\tau}(\gamma_{Q,1} - \gamma_{L,1}) \frac{K_{L,2}^{3/2}}{3!} \frac{dl(X)}{dS_T}$$

$$+ e^{-r\tau}(\gamma_{Q,2} - \gamma_{L,2}) \frac{K_{L,2}^2}{4!} \frac{d^2l(X)}{dS_T^2}. \quad (3.13)$$

Koristeći izraz (3.13) lako je procijeniti impliciranu sredinu, varijancu, asimetriju,  $\gamma_{Q,1}$  i zaobljenost,  $\gamma_{Q,2}$ .

Izraz za funkciju gustoće neutralnu na rizik dobivamo dvostrukim diferenciranjem (3.13) po  $K$ :

$$q(S_T) = l(S_T) - (\gamma_{Q,1} - \gamma_{L,1}) \frac{K_{L,2}^{3/2}}{6} \frac{d^3l(S_T)}{dS_T^3} + (\gamma_{Q,2} - \gamma_{L,2}) \frac{K_{L,2}^2}{24} \frac{d^4l(S_T)}{dS_T^4} \quad (3.14)$$

pri čemu se parcijalne derivacije mogu iterativno izračunati (Jondeau et al., 2006). Iterativni izračun ukazuje na to da će funkcija gustoće neutralna na rizik dobivena EE modelom biti polinom čiji će koeficijenti direktno utjecati na asimetriju i zaobljenost same funkcije gustoće neutralne na rizik. Izraz za derivate log-normalne distribucije je kompliciran kod ovog modela. Stoga je preporuka da se za te derivate izrazima dolazi numerički.

### 3.2.3 Neparametarski modeli

U ovom dijelu će se predstaviti Shimko (u literaturi poznato kao Spline metoda odnosno jedna od metoda interpolacije) model. Ovaj model izravno koristi rezultate Breeden-Litzenbergerove formule (uvedenoj u potpoglavlju 2.2). Prije same primjene rezultata navedene formule potrebno je izgladiti krivulju volatilnosti. Budući da direktna procjena volatilnosti ne daje stabilne rezultate, ideja je prvenstveno okupiti sve informacije o krivulji volatilnosti polinomom  $\sigma(X)$ , funkcijom cijene izvršenja  $X$  te onda iskoristiti Breeden-Litzenbergerov izraz za procjenu funkcije gustoće vjerojatnosti (Jondeau et al., 2006). Dakle, izraz za europsku opciju kupnje te o kojim parametrima ovisi:

$$C(S_t, X, \tau, r, \sigma) = C(S_t, X, \tau, r, \sigma(X)) \quad (3.15)$$

Prema Shimko, korišten je kvadratni polinom za  $\sigma(X)$ :

$$\sigma_i = a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

pri čemu je  $n$  broj opaženih cijena. Parametri ovog polinoma se mogu lako procijeniti linearnom kvadratnom regresijom.

Prije nego što damo izraz za procjenu funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik, osvrnut ćemo se na kubnu spline interpolaciju volatilnosti. Važno je vidjeti kako rješavamo problem kubne spline interpolacije. Kubni spline je zapravo polinom trećeg stupnja za cijenu izvršenja  $X$ :

$$\sigma_i = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \quad (3.17)$$

tako da za svaku cijenu izvršenja  $X_i$ , funkcija poprimi vrijednosti poznate volatilnosti  $\sigma(X_i) = \sigma_i$ . Kako bismo dobili kubni spline pretpostavimo da je druga derivacija  $\sigma$  poznata za cijenu izvršenja  $X_i$ . Kubni spline pretpostavlja da je druga derivacija dana kao linearna interpolacija između opaženih točki. Slijedi:

$$\sigma''(X_i) = 2a_2 + 6a_3 X_i$$

tako da od linearne interpolacije dobivamo, za svaki  $X \in [X_{i-1}, X_i]$ :

$$\sigma''(X) = -\sigma''(X_{i-1})\frac{X - X_i}{X_i - X_{i-1}} + \sigma''(X_i)\frac{X - X_{i-1}}{X_i - X_{i-1}}. \quad (3.18)$$

Kada dva puta integriramo izraz (3.18) u odnosu na  $X$  dobivamo:

$$\sigma(K) = -\sigma''(X_{i-1})\frac{(X_i)^3}{6(X_i - X_{i-1})} + \sigma''(X_i)\frac{(X_{i-1})^3}{6(X_i - X_{i-1})} + c_0 + c_1X.$$

Ova funkcija mora uzeti vrijednosti  $\sigma(X_i) = \sigma_i$  u  $X_i$  kako bi riješili za  $a_0$  i  $a_i$ .

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sigma''(X_{i-1})\frac{(X_i)^3}{6(X_i - X_{i-1})} + \sigma''(X_i)\frac{(X_{i-1})^3}{6(X_i - X_{i-1})} \\ &+ \left(\frac{\sigma_i}{X_i - X_{i-1}} - \frac{\sigma''(X_i)(X_i - X_{i-1})}{6}\right)(X - X_{i-1}) \\ &- \left(\frac{\sigma_{i-1}}{X_i - X_{i-1}} - \frac{\sigma''(X_{i-1})(X_i - X_{i-1})}{6}\right)(X - X_i). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Diferenciranjem izraza (3.18) dobivamo sustav jednadžbi za  $i = 2, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned} \sigma''(X_{i-1}) &= \frac{X_i - X_{i-1}}{6} + \sigma''(X_i)\frac{X_{i+1} - X_{i-1}}{3} + \sigma''(X_{i-1})\frac{X_{i+1} - X_i}{6} \\ &= \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{X_{i+1} - X_i} - \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{X_i - X_{i-1}}. \end{aligned}$$

Dakle imamo sustav od  $n - 1$  jednadžbi za  $n$  nepoznatih  $\sigma''(X_i)$ . Kako bi riješili ovaj sustav potrebna je dodatna pretpostavka o granicama. Pretpostavimo da nema konveksnosti na granicama, a to je ekvivalentno pretpostavci  $\sigma''(X_1) = \sigma''(X_n) = 0$ .

Sada ćemo izvesti izraz za procjenu funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik. Važno je primijetiti kako implicirana volatilitnost, pa i cijena, opcije  $i$  ovisi o cijeni izvršenja  $X_i$ , za  $i = 1, \dots, n$ .

$$C(t, S, X, T) = S\Phi(d_1(\sigma(X))) - e^{-r\tau}X\Phi(d_2(\sigma(X))). \quad (3.20)$$

Slijedi izraz za funkciju gustoće vjerojatnosti neutralnu na rizik:

$$\begin{aligned}
q(X) &= e^{r\tau} \frac{\partial^2 C(t, S, \sigma(X), T)}{\partial X^2} \\
&= e^{r\tau} S(d_1''\phi(d_1(X)) - (d_1')^2 d_1\phi(d_1(X))) - d_2'\phi(d_2(X)) \\
&\quad - X(d_2''\phi(d_2(X)) - (d_2')^2 d_2\phi(d_2(X))).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Za kvadratni slučaj (Shimko, 1993) slijedi:

$$\begin{aligned}
d_1(X) &= \frac{1}{\sigma(X)\sqrt{\tau}} \log\left(\frac{S}{Xe^{r\tau}}\right) + \frac{1}{2}\sigma(X)\sqrt{\tau} \\
d_2(X) &= d_1(X) - \sigma(X)\sqrt{\tau}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(X) &= (a_0 + a_1X + a_2X^2)\mathbb{1}_{(X > \min(X_i), X < \max(X_i))} \\
&\quad + \sigma_1\mathbb{1}_{(X \leq \min(X_i))} + \sigma_M\mathbb{1}_{(X \geq \max(X_i))}
\end{aligned}$$

pri čemu je  $\mathbb{1}_{(A)}$  karakteristična funkcija. Dakle ona poprima vrijednost 1 kada je  $A$  istinit.

Prva i druga derivacija od  $d_1$  i  $d_2$  slijede:

$$\begin{aligned}
d_1'(X) &= -\frac{\sigma'(X)\sqrt{\tau}}{\sigma^2(X)\tau} \log\left(\frac{S}{Xe^{r\tau}}\right) - \frac{1}{X\sigma(X)\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sigma'(X)\sqrt{\tau} \\
d_2'(X) &= d_1'(X) - \sigma'(X)\sqrt{\tau} \\
d_1''(X) &= -\frac{\sigma''(X)\sigma(X)\tau - 2\sigma'(X)^2\tau}{(\sigma(X)\sqrt{\tau})^3} \log\left(\frac{S}{Xe^{r\tau}}\right) + \frac{1}{X} \frac{\sigma'(X)\sqrt{\tau}}{\sigma^2(X)\tau} \\
&\quad + \frac{\sigma(X)\sqrt{\tau} + X\sigma'(X)\sqrt{\tau}}{X^2\sigma^2(X)\tau} + \frac{1}{2}\sigma''(X)\sqrt{\tau} \\
d_2''(X) &= d_1''(X) - \sigma''(X)\sqrt{\tau} \\
\sigma'(X) &= (a_1 + 2a_2X)\mathbb{1}_{(X > \min(X_i), X < \max(X_i))} \\
\sigma''(X) &= 2a_2\mathbb{1}_{(X > \min(X_i), X < \max(X_i))}.
\end{aligned}$$

Time smo dali sve izraze za procjenu funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik Shimko modelom.

## 4 Izbor referentne funkcije gustoće vjerojatnosti

### 4.1 Referentne funkcije gustoće vjerojatnosti u dosadašnjim istraživanjima

U ovom poslijediplomskom specijalističkom radu pokazuje se kako je "prava" funkcija gustoće vjerojatnosti upravo ona dobivena visokofrekventnim podacima na datum dospjeća opcije. Ovim dijelom se daje uvid u ono što je do sada u literaturi korišteno kao referentna funkcija gustoće vjerojatnosti. Vrlo često se tvrdi da je "prava" distribucija vrlo komplicirana za izvesti i prezentirati te je vrlo nejasno opisana u dosadašnjoj literaturi (Sawa, 1978). Opće je prihvaćeno da je prava funkcija gustoće vjerojatnosti nepoznata, pa se pretpostavlja neka teorijska funkcija ili se ista simulira uz nove pretpostavke. Pokazuju se empirijski rezultati da se funkcija gustoće vjerojatnosti dobivena visokofrekventnim podacima može skalirati te se dovoljno dobro prilagođava funkcijama gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik dobivene prognostičkim modelima. U dosadašnjoj su literaturi kao referentnu funkciju gustoće korištene funkcije na temelju Monte Carlo simulacija pretpostavljajući Hestonov stohastički proces. Baš taj proces je najzastupljeniji u istraživanjima jer objedinjuje sve karakteristike financijske imovine: asimetrija, debeli repovi (*engl. fat-tails*) i vremenski promjenjiva varijanca odnosno volatilitnost (Bouden, 2007). Unatoč tome u ovom poslijediplomskom specijalističkom radu se želi dobiti "prava" funkcija gustoće na temelju empirijskih podataka visokih frekvencija. To podrazumijeva neparametarsku procjenu funkcije gustoće vjerojatnosti koja je vođena podacima (*engl. data-driven*).

Kod uvjetne gustoće vjerojatnosti kao referentne mjere cilj je bio istražiti koji prognostički model daje funkciju gustoće vjerojatnosti aproksimativno najbližu uvjetnoj funkciji gustoće vjerojatnosti. Definirana je bila metrika kao mjera udaljenosti danih rezultata prognostičkih modela i referentne funkcije gustoće vjerojatnosti. Nakon toga su se modeli uspoređivali definiranom metrikom u odnosu na referentnu i time dobili procjenu koji je najbolji (Bao et al., 2006).

Istraživanje univarijatnih modela u svrhu prognoziranja inflacije u Sjedinjenim Američkim Državama korišteni su DESARIMA modeli. Kako bi se usporedili prognostički modeli te procijenila njihova prediktivna moć korištena je *out-of-sample* RMSPE mjera. DESARIMA modeli su uspoređivani sa tradicionalnim univarijantnim modelima vremenskih nizova koji su već bili dostupni u dosadašnjoj literaturi. Dakle, referentni vremenski nizovi su uzeti iz literature. Korištenje univarijatnih modela za predikciju vremenskih nizova je već utvrđena metoda. Specifično korišteni modeli su ARMA(1,1)

model, RW model i AR(p) model (Pincheira et al., 2014). Ova metoda istraživanja je pogodna za predikcije inflacije i kretanja BDP-a. Međutim, navedeni modeli služe samo za predikciju sredine i eventualno varijance. Univarijatni modeli nipošto ne predviđaju čitavu distribuciju vjerojatnosti.

Kako bi se odredilo koji je prediktivni model bolji simulirano je 3000 *out-of-sample* scenarija za dvije varijante svakog modela. Uzeta je srednja vrijednost svih 3000 scenarija i to za svaki vremenski pomak. Zatim su uspoređivani rezultati simulacije i opaženog stanja vremenskog niza. Također je korištena metodologija simulacije iz Markovljevih modela. Time se ocijenila sposobnost modela stope dolazaka pomoću Markovljevih modela (Klaeboe et al., 2013).



## 4.2 Procjena realizirane funkcije gustoće vjerojatnosti

### 4.2.1 Visokofrekventni podaci

Glavni razlog akademskog i aplikativnog interesa za visokofrekventne podatke jest struktura tržišta i sam proces trgovanja. Proces je potaknut tehnološkim napretkom, razvojem samog trgovinskog sistema, rastuće kompetitivnosti među burzama i snažnog povećanja trgovinske aktivnosti unutar dana. Elektronske trgovinske platforme su automatizirale i ubrzale sam proces izvršenja transakcija kao i povećanje transparentnosti odnosno trgovinskog izvještavanja. Na taj način se omogućuje investitorima da automatiziraju strategiju ulaganja i brže upravljanje zadavanjem naloga. Alternativne trgovinske platforme, kao što su elektronske komunikacijske mreže (ECN) prestižu tradicionalno tržište kontinuirane trgovine po likvidnosti. U posljednjem desetljeću značajno su smanjeni transakcijski troškovi te je brzina trgovanja i zadavanja naloga ubrzana. Kompetitivnost između tradicionalnih tržišta kontinuirane e-trgovine i ECN-ova mijenja dosadašnje spoznaje te ekonometrijsko modeliranje.

Podaci o transakcijama i knjiga naloga koje klasična tržišta i trgovinske platforme transparentno osiguravaju, stvaraju akademski interes jer omogućavaju analizu utjecaj institucionalnih postavki na proces trgovanja, predikciju cijena kao i ishod tržišnih očekivanja. Time se omogućava proučavanje dinamike tržišta i ponašanja malih (fizičke osobe) i institucionalnih ulagatelja na tržištu. Praćenje cijena imovine i likvidnosti tržišta te potražnja na maksimalno visokoj frekvenciji otvara mogućnosti konstrukcije učinkovitijih procjenitelja i prediktora kao i indikatora za promjenu cijene, vremenski promjenjive korelacijske strukture i rizike likvidnosti.

Metode i modeli visokofrekventnih podataka imaju sve veću važnost u financijskoj industriji. Glavni ciljevi u financijskoj praksi jest analizirati i predvidjeti volumen i promet trgovanja, volatilnost financijskih instrumenata, dubinu tržišta, bid-ask spread te naknade trgovanja. Potrebne su statističke i ekonometrijske tehnike kako bi se kvantificirali odnosi između tijeka naloga, volatilnosti i likvidnosti. Također je bitno kvantificirati odnos između samog tržišta i imovine. Iz perspektive propisa i regulacije, rizici likvidnosti, cjenovni rizici i posljedice automatiziranog visokofrekventnog trgovanja na tržištu kapitala još nisu u potpunosti razumljivi i stoga su vrlo važna aktualna i daljnja empirijska istraživanja.

Visokofrekventni podaci imaju jedinstvena svojstva koja su izazov za standardnu statističku i ekonometrijsku analizu. Jedno od glavnih svojstva jest da visokofrekventni

podaci nisu opaženi u jednako udaljenim vremenskim točkama niti su kontinuirani nego su diskretni.

Vrlo važno svojstvo visokofrekventnih podataka je diskretno ponašanje cijena, naloga, spread ponude-potražnje i broja transakcija u određenom intervalu vremena. Većina visokofrekventnih varijabli su nenegativne, pozitivno autokorelirane te imaju značajnu untardnevnu periodičnost. Trgovanje i knjiga naloga viskofrekventni podataka je multidimenzionalna te ima kompleksnu multivarijatnu dinamičku strukturu. Kako bi se obuhvatila i opisala sva svojstva visokofrekventnih podataka, nove vrste ekonometrijskih modela su se razvile.

Karakteristike koje su najznačajnije kod visokofrekventnih podataka su ne-normalnost, duga memorija i mikrostrukturni šum. Visokofrekventne podatke karakterizira ne-normalnost odnosno pokazuju svojstvo debelih repova (*engl. fat tails*). Normalna distribucija pretpostavlja da sve vrijednosti uzorka su distribuirane jednako iznad i ispod sredine. Dakle, 99,7% svih vrijednosti upada unutar tri standardne devijacije od sredine te stoga postoji samo 0,3% šanse ekstremnih vrijednosti. Mnogi modeli, poput Black and Scholes modela vrednovanja opcija, pretpostavljaju normalnost. Međutim, u praksi (na financijskim tržištima) je pokazano da nepredvidljivo ljudsko ponašanje dovodi do upravo takvih ekstremnih događaja. Posljedično, to dovodi do distribucije debelih repova. Distribucija debelih repova jest distribucija vjerojatnosti koja predviđa kretanja od tri ili više standardnih devijacija češće od normalne distribucije. Visokofrekventni podaci su okarakterizirani dugom memorijom. Duga memorija se pojavljuje kod analize vremenskih serija. To se odnosi na brzinu propadanja statističke ovisnosti dviju točaka s povećanjem vremenskog intervala ili prostorne udaljenosti između točaka. Smatra se da ova pojava ima dugoročnu memoriju ako se ovisnost smanjuje sporije od eksponencijalnog raspada. Svojstvo mikrostrukturnog šuma je pojava opažena kod visokofrekventnih podataka, a odnosi se na uočeno odstupanje cijene od osnovne cijene. Prisutnost mikrostrukturnog šuma čini procjene nekih parametara visokofrekventnih podataka (poput ostvarene volatilnosti) vrlo nestabilnima. Mikrostrukturni šum kod visokofrekventnih podataka može biti rezultat različitih čimbenika poput: bid-ask razlike, asimetrije informacija, diskretnost promjena cijene i latencije naloga.

U nastavku se daje opis brokera i oblika te karakteristike trgovanja. Brokeri ili trguju na vlastiti račun ili u ime klijenta. Dakle dijelimo dvije vrste trgovanja - gdje broker trguje na vlastiti račun i kada trguje u ime klijenta. Brokeri su i poticatelji likvidnosti shodno tržišnim pomacima. Operativno su ili specijalisti, održavatelji tržišta ili klijentski nalogodavci. Burze su trgovinske platforme gdje brokeri izvode transak-

cije. Na većini burza jedino brokeri članovi mogu trgovati. Razlikujemo regularno trgovanje na platformi gdje brokeri zadaju naloge i elektronsko trgovanje gdje brokeri trguju putem elektronskog sustava. Kod elektronskog trgovinskog sustava sklapanje naloga se izvodi elektronski odnosno naloge sklapa algoritam. Uglavnom investicijska društva imaju vlastite trgovinske platforme koje organiziraju transakcije u ime klijenata. Važan primjer su elektronske komunikacijske mreže (ECN) koje su elektronski sustavi za zadavanje naloga, nisu regulirani kao regularne trgovinske platforme te su u vlasništvu investicijskih društava. Takve trgovinske platforme su poznate kao i alternativni trgovinski sustavi te su glavna konkurencija regularnim trgovinskim platformama. Važno je napomenuti da postoji i OTC (*engl. over-the-counter*) trgovanje odnosno izvanburzovno tržište. Na OTC-u financijskim instrumentima se trguje između kupca i prodavatelja koji pregovaraju izravno, a ne putem formalne burze odnosno trgovinske platforme.

Nalog prezentira instrukciju brokera koji ne može osobno pregovarati trgovanje i time je određeno čime se trguje, kada se trguje i koliko. Potražnja (ponuda) opisuje brokerovu namjeru za kupnju (prodaju) te sadrži parametre količine i cijene za izvršenje transakcije. Naime, cijene ponude i potražnje su cijene prema kojima broker želi trgovati. Najviša (najniža) cijena ponude (potražnje) se zove najbolja cijena ponude (potražnje). Razlika između najbolje potražnje i najbolje ponude je spread ponude-potražnje. Tržišni nalog je nalog kojim se instantno trguje po najboljoj cijeni trenutno na tržištu. Cijena po kojoj je izvršen tržišni nalog se zove tržišna cijena. Nalog limita je nalog za trgovanje po cijeni koja nije gora od tzv. cijene limita specificirane od strane brokera. Što je veća razlika između naloga limita i najboljeg naloga u knjizi naloga to je gora pozicija samog naloga te manja vjerojatnost da će doći do izvršenja. Nalog zaustavljanja je nalog koji automatski kupuje (prodaje) danu količinu nakon što cijena naraste (padne) do cijene zaustavljanja. U slučaju prodaje, nalog zaustavljanja sprječava daljnje gubitke kada cijena nastavi padati. U usporedbi sa nalogom limita, nalog zaustavljanja je aktiviran čim cijena prijeđe definiranu cijenu zaustavljanja.

Struktura tržišta određuje tko može trgovati, čime se trguje, kada i kako se može trgovati. Generalno razlikujemo kontinuiranu trgovinu i dražbu otvaranja. Kod kontinuirane trgovine brokeri mogu trgovati bilo kada dok je tržište otvoreno, dok kod dražbe otvaranja (kao u modalitetu dražbe) transakcije se sklapaju putem postupka dražbe. Dražbe otvaranja služe tome da se otvori trgovinski dan i nagodi cijena prije nego što krene kontinuirano trgovanje.

#### 4.2.2 Izbor frekvencije uzorkovanja

U zadnjem desetljeću su intradnevni podaci financijskih instrumenata postali dostupniji i kvalitetniji. Izazov je bio analizirati tržišta koja su likvidna i imaju značajan dnevni volumen trgovanja opcijama. U ovom poslijediplomskom specijalističkom radu podaci su preuzeti iz baze podataka Thomas Reuters. Interval između visokofrekventnih podataka je jedna minuta. Promatrana financijska tržišta su: CAC (Cotation Assistée en Continu), AEX (Amsterdam Exchange index), MIB (Milano Indice di Borsa) i DAX (Deutscher Aktienindex). Korišteni financijski instrumenti su opcije kupnje i prodaje na glavne indekse navedenih financijskih tržišta na datume opažanja: 23.03.2018., 20.04.2018., 18.05.2018. i 22.06.2018. Pomoću tih podataka procjenjujemo implicirane funkcije gustoće vjerojatnosti na datume dospijea modelima: Shimko model, Mixture Log-Normal model i Edgeworth expansion model. Viskofrekventni podaci su preuzeti za navedene glavne tržišne indekse na datume dospijea opcija 20.07.2018., 17.08.2018., 21.09.2018. i 12.12.2018. Pomoću njih je procijenjena Kernelova realizirana funkcija gustoće vjerojatnosti. Dakle, uspoređujemo dobivene procijenjene implicirane funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik i procijenjene realizirane funkcije gustoće vjerojatnosti koja je referentna. Čišćenje sirovih podataka se vrši na sljedeći način. Pretpostavlja se da za svaku cijenu izvršenja (engl. *strike price*) postoji opcija na kupnju i prodaju u parovima. Čišćenje se radi tako da se iz postojećeg uzorka uzme poduzorak koji zadovoljava više kriterija kao što je zahtijevano da je cijena ponude veća od nula. Stoga je obično velika razlika između dostupnih cijena opcija na kupnju i prodaju od stvarno korištenih. Ukoliko preostaje manje od deset cijena izvršenja za koje imamo podatke o opcijama na kupnju i prodaju, onda se funkcija gustoće vjerojatnosti neće procijeniti bilo kojom od korištenih metoda u ovom poslijediplomskom specijalističkom radu. Rezultate smo dobili za sljedeće kombinacije datuma opažanja i datuma dospijea (engl. *expiration date*):

Opazanje/Dospijea	20.07.2018.	17.08.2018.	21.09.2018.
23.03.2018.			AEX, DAX, MIB
20.04.2018.			AEX, CAC
18.05.2018.	DAX		AEX, CAC, DAX, MIB
22.06.2018.	AEX, CAC, DAX, MIB	AEX, DAX	AEX, DAX

Tablica 1: Promatrana financijska tržišta na dane kombinacije datuma opažanja i datuma dospijea

### 4.2.3 Kernelova procjena realizirane funkcije gustoće vjerojatnosti

Kada se promatra slučajni uzorak  $X_1, \dots, X_n$  iz dane distribucije vjerojatnosti sa funkcijom gustoće vjerojatnosti  $f(x)$ , pitanje je kako procijeniti  $f(x)$ . Najpoznatija neparametarska metoda (ne pretpostavlja o kojoj se funkciji distribucije vjerojatnosti radi) je *kernel* procjena:

$$\tilde{f}_\beta(x) = (n\beta)^{-1} \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x - X_j}{\beta}\right), \quad (4.1)$$

pri čemu se pretpostavlja da je kernel funkcija  $K(x)$  simetrična i unimodalna funkcija gustoće vjerojatnosti te je  $\beta$  širina pojasa. Širina pojasa kontrolira izglađenost procjene funkcije gustoće vjerojatnosti i od velikog je utjecaja na sam izgled procjene. Najčešće korištene kernel funkcije su: uniformna, Epanechnikova i normalna. U ovom poslijediplomskom specijalističkom radu koristimo normalnu kernel funkciju tj.  $K(x) = \phi(x)$ , pri čemu je  $\phi$  standardna normalna funkcija gustoće vjerojatnosti. Izbor Kernelovog procjenitelja nema bitnog utjecaja na konačnu Kernelovu funkciju gustoće odnosno istraživanja su pokazala da izbor Kernela ne utječe na konačan ishod, dok je više osjetljiv na širinu pojasa (Rosenberg i Engle, 2002). Kernelov procjenitelj je intuitivno vrlo sličan metodologiji histograma. Naime, Kernelov procjenitelj prvenstveno "konstruira" funkcija gustoće vjerojatnosti (normalnih) koliko ima podataka te zatim zbraja sve te funkcije gustoće vjerojatnosti dajući konačnu procjenu. Kada bismo uspoređivali dobivenu procjenu krivulje sa histogramom (koristeći iste podatke) prijetili bismo očitu razliku u glatkoći histograma i Kernelove procjene. Kernelov procjenitelj konvergira brže ka pravoj funkciji gustoće vjerojatnosti za kontinuiranu slučajnu varijablu.

#### 4.2.4 Izbor širine pojasa Kernelovog procjenitelja

Odabir prikladne širine pojasa,  $\beta$ , Kernelovog procjenitelja od ključne je važnosti kod procjene funkcije gustoće vjerojatnosti  $f(x)$ . Mnoga istraživanja preporučuju po defaultu kod programiranja ali i pojedinačni odnosno proizvoljan odabir  $\beta$  (Chiu, 1996), te u ovom poslijediplomskom specijalističkom radu odabir širine pojasa Kernelovog procjenitelja se vrši na svaki datum dospijeća. Iako je neparametarska Kernelova procjena danas standardna tehnika u istraživačkoj analizi podataka, još uvijek postoji veliki spor o tome kako ocijeniti pouzdanost ili valjanost procjene i koji je izbor širine pojasa Kernelovog procjenitelja optimalan. Glavni argument je treba li koristiti engl. *Integrated Squared Error* ili engl. *Mean Integrated Squared Error* za definiranje optimalne širine pojasa. Posljednjih godina provedeno je mnogo istraživanja kako bi se razvile metode odabira širine pojasa koje pokušavaju procijeniti optimalnu širinu dobivenu bilo kojim od navedenih kriterija pogreške.

U ovom poslijediplomskom specijalističkom radu rezultati istraživanja su provedeni u programskom jeziku R koristeći integriranu funkciju *density*. Prema zadanim postavkama, funkcija *density* odabire širinu pojasa prema radnom pravilu koji daje tzv. *oversmoothed bandwidth* odnosno prema formuli  $\sigma_K^2 = \int x^2 K(x) dx$  odabire širinu pojasa na temelju normalnog referentnog pravila. Unatoč tome, moguće je proizvoljno odabrati širinu pojasa mijenjajući parametar funkcije *density*, *bw*. Parametar *bw* je podešavan tako da se dobije najbolja prilagodba visokofrekventnim podacima.

## 5 Metode usporedbe referentne funkcije gustoće s impliciranim funkcijama gustoće vjerojatnosti

### 5.1 Prednosti i nedostaci dosadašnjih komparativnih analiza

U ovom dijelu daje se pregled metoda usporedbe za prognostičke modele i referentne vrijednosti navedene u prethodnoj literaturi. U ovom poslijediplomskom specijalističkom radu odnosno istraživanju predstavljamo grafičku i analitičku usporedbu referentne funkcije gustoće vjerojatnosti dobivene visokofrekventnim podacima na datum dospijeća i procijenjenu funkciju gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik dobivene od strane tri modela vrednovanja opcija. U prethodnoj literaturi prevladava grafička usporedba. U nekim istraživanjima se tržišna očekivanja na temelju cijena opcija procjenjuju jednim brojem pa je bilo poželjno konstruirati intervale pouzdanosti kako bi se dobila određena mjera za pouzdanost same procjene. Stoga se raspravljalo o tome kako izgraditi intervale pouzdanosti pomoću neparametarske metode *bootstrap*. Konačno, intervali pouzdanosti konstruirani su iz empirijske funkcije gustoće vjerojatnosti. U drugoj aktuarskoj literaturi uobičajeno je korištenje funkcija *copula* kako bi se osigurao prikladan način izražavanja zajedničkih distribucija dviju ili više slučajnih varijabli i stoga mjerenje sličnosti između njih. Također, u prethodnoj literaturi predstavljena je usporedba triju parametarskih modela: Mješavina dvaju log-normalna (MLN), Black-Scholes-Mertona (BSM) i Generaliziranog beta-a (GB2) te se uspoređuju kako bi se otkrilo koji opisuje "najbolje" funkciju gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik (Arnerić et. al., 2015). Za usporedbu rezultata ovih modela korišteni su MSE (srednja kvadratna pogreška) i ARE (apsolutna relativna pogreška). Također, Diebold - Mariano test (DM) koristi se za testiranje koji model ima niži MSE (srednja kvadratna pogreška). Postala je uobičajena praksa procjenjivanja adekvatnosti modela prognoze funkcije gustoće vjerojatnosti na temelju integralne transformacije vjerojatnosti (PIT). Ako je model prognoze funkcije gustoće vjerojatnosti točno specificiran, PIT transformacije bi trebale slijediti jednoliku odnosno uniformnu distribuciju nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Budući da u dosadašnjoj literaturi ne postoji konsenzus o "najboljem" parametarskom modelu za procjenu funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik, cilj ovog poslijediplomskog specijalističkog rada jest usporediti efikasnost triju najčešće korištenih modela. Zbog različitih obilježja predloženih modela smatramo da su osjetljivi na različite datume dospijeća opcija kupnje i prodaje temeljne imovine. Budući da poluparametarski i neparametarski pristupi ne daju eksplicitan oblik za funkciju gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik i ne postoji nikakva pretpostavka o samoj funkciji, ovaj se poslijediplomski specijalistički rad usredotočuje na parametarske pristupe, tj. tri najčešće korištena parametarska modela za procjenu funkciju gustoće vjerojat-

nosti neutralne na rizik: Shimko model (SM), Mixture Log-Normal model (MLN) i Edgeworth expansion model (EE).



## 5.2 Metode usporedbe *out-of-sample* i utvrđivanje prediktivne sposobnosti

### 5.2.1 Kolmogorov - Smirnov test

Empirijska funkcija distribucije  $F_n$ , posebno za velike  $n$ , omogućuje dobar uvid u nepoznatu distribuciju vjerojatnosti promatrane slučajne varijable  $X$ , pa se odmah nameće ideja da se ona iskoristi pri testiranju hipoteze  $H_0$  da podaci  $x_1, \dots, x_n$  potječu od konkretne distribucije vjerojatnosti koja pripada funkciji distribucije vjerojatnosti  $F_0$ . Promatrajući empirijsku funkciju distribucije, može se naslutiti koja je konkretna teorijska distribucija vjerojatnosti, okarakterizirana funkcijom  $F_0$ . U ovom poglavlju će se opisati Kolmogorov - Smirnov test (KS - test) koji se primjenjuje na kontinuirane distribucije vjerojatnosti.

Kolmogorov - Smirnov test omogućuje testiranje hipoteze:

$H_0$  : Uzorak potječe od kontinuirane distribucije vjerojatnosti sa funkcijom distribucije vjerojatnosti  $F_0$ , uz zadanu razinu značajnosti  $\alpha$ .

Kritično područje Kolmogorov - Smirnov testa određuje se na temelju test statistike

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)|, \quad (5.1)$$

kojoj, u uvjetima istinitosti hipoteze  $H_0$ , pripada odgovarajuća distribucija vjerojatnosti koja nije ovisna o  $F_0$  nego samo o veličini uzorka  $n$ .

Ta se tvrdnja temelji na činjenici da za svaku kontinuiranu slučajnu varijablu  $X$ , kojoj pripada funkcija distribucije vjerojatnosti  $F$ , vrijedi da slučajnoj varijabli  $Y = F(X)$  pripada uniformna distribucija  $U(0, 1)$ . Uzme li se naime,  $y \in \langle 0, 1 \rangle$  i sa  $G$  označi funkcija distribucije vjerojatnosti slučajne varijable  $Y$ , može se pisati:

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq F^{-1}(y)) = F[F^{-1}(y)] = y,$$

a to znači da vrijedi:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y, & 0 < y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases} \quad (5.2)$$

odnosno  $Y = F(X)$  prati distribuciju vjerojatnosti  $U(0, 1)$ .

Transformira li se niz podataka  $x_1, \dots, x_n$  u niz  $y_1 = F_0(x_1), \dots, y_n = F_0(x_n)$  i ako se  $G_n$  označi empirijska funkcija razdiobe za taj niz, u uvjetima istinitosti hipoteze  $H_0$  odgovarajuća teorijska distribucija je  $U(0, 1)$ . Vrijednost  $G_n(y)$  označuje relativnu frekvenciju događaja  $Y \leq y$  u nizu  $y_1, \dots, y_n$ , a budući da je  $y = F_0(x)$  i  $F_0$  strogo monotona funkcija, to je  $G_n(y) = F_n(x)$  i  $|F_n(x) - F_0(x)| = |G_n(y) - y|$ , iz čega proizlazi da je:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F_0(x)| = \max_{y \in (0,1)} |G_n(y) - y|. \quad (5.3)$$

Iz prethodnog izraza se vidi da je maksimalna udaljenost između empirijske funkcije distribucije i pretpostavljene teorijske funkcije distribucije vjerojatnosti  $F_0$  jednaka maksimalnoj udaljenosti između empirijske funkcije distribucije za niz transformiranih podataka  $y_1, \dots, y_n$  i funkcije distribucije vjerojatnosti za uniformnu distribuciju vjerojatnosti  $U(0, 1)$ .

Prema tome, da bi se našla distribucija vjerojatnosti statistike  $D_n$  iz (5.1), dovoljno je promotriti  $D_n = \max |\tilde{G}_n(y) - y|$ , tj. slučaj kada se kao teorijska distribucija uzima  $U(0, 1)$ . Problem određivanja pripadne funkcije distribucije vjerojatnosti

$$K_n(x) = P_0(D_n \leq x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

vrlo je složen pa u ovom poslijediplomskom specijalističkom radu nećemo ulaziti u detalje.

Vrijednost  $d_n$ , test statistike  $D_n$ , je određeni pokazatelj globalne razlike između empirijske funkcije distribucije  $F_n$  i pretpostavljene teorijske funkcije distribucije vjerojatnosti  $F_0$ , pa ako se dobije prevelika vrijednost  $d_n$ , onda to indicira da hipotezu  $H_0$  treba odbaciti. To znači da će kritično područje razine značajnosti  $\alpha$  biti određeno uvjetom  $d_n \geq c_0$ , gdje je  $c_0$  određeno tako da vrijedi  $P_0(D_n \geq c_0) = \alpha$ , odnosno

$$c_0 = K_n^{-1}(1 - \alpha), \quad (5.5)$$

pri čemu je  $K_n^{-1}$  inverzna funkcija od  $K_n$ .

Budući da ne postoji jednostavan analitički izraz za funkcije  $K_n^{-1}$  i  $K_n$ , izrađene su tablice za konkretnu primjenu Kolmogorov-Smirnov testa. Kolmogorov je inače pokazao da za velike vrijednosti  $n$ , tj.  $n \rightarrow \infty$ , slučajnoj varijabli  $\sqrt{n}D_n$  pripada funkcija distribucije vjerojatnosti

$$K(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2x^2), \quad x > 0, \quad (5.6)$$

kojom je definirana tzv. Kolmogorovljeva distribucija. To praktički znači da za sve  $n \geq 100$  kritična vrijednost  $c_0$  iz (5.5) može računati primjenom ove jednostavne tablice:

$\alpha$	0,10	0,05	0,01
$c_0$	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$

Tablica 2: Kritične vrijednosti uz pripadne razine značajnosti

Tako, na primjer, dobije li se na uzorku veličine  $n = 100$  vrijednost test-statistike  $d_n = 0,15$ , zaključit će se uz 5% rizika da se odbaci istinita hipoteza, da izmjereni podaci ne potkrepljuju hipotezu o vjerojatnosnoj distribuciji sa funkcijom distribucije vjerojatnosti  $F_0$ . Tada je, naime,  $c_0 = \frac{1,36}{\sqrt{100}} = 0,136$ , pa se vidi da točka 0,15 (vrijednost test-statistike) pada u kritično područje  $[0,136, \infty)$ .

Glavna prednost Kolmogorov - Smirnov testa pred hkvadrat-testom pri testiranju hipoteze o pretpostavljenoj kontinuiranoj distribuciji vjerojatnosti jest ta što on ne zahtijeva grupiranje podataka u razrede, što je inače vrlo proizvoljan postupak kojim se gubi određeni dio informacije o promatranoj pojavi sadržane u datom nizu podataka.

Nedostatak Kolmogorov - Smirnov testa očituje se u situaciji kada se najprije, na temelju danih podataka, izvodi procjena parametara pretpostavljene teorijske distribucije vjerojatnosti, a zatim se na istim podacima primjenjuje i Kolmogorov - Smirnov test. Nije, naime, teorijski razjašnjen utjecaj procjene parametara na distribuciju vjerojatnosti test-statistike  $D_n$ , što je inače objašnjeno Fischerovim teoremom za hkvadrat-test.

Što se tiče razlučivosti Kolmogorov - Smirnov testa, poznato je da njime, razine značajnosti  $\alpha$ , ne mogu razlučiti vjerojatnosne distribucije s pripadnim funkcijama distribucije vjerojatnosti  $F$  i  $G$  ako je

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(X)| \leq \begin{cases} \frac{0,84}{\sqrt{n}}, & \alpha = 0,05 \\ \frac{0,65}{\sqrt{n}}, & \alpha = 0,10 \end{cases} \quad (5.7)$$

Promotrite li se, na primjer, standardna normalna distribucija  $N(0,1)$  i uniformna distribucija  $U(0,1)$ , tada je:

$$F(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.8)$$

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{3}} + 1 \right), & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 1, & x > \sqrt{3} \end{cases} \quad (5.9)$$

tako da je

$$D(x) = F(x) - G(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x \leq -\sqrt{3} \\ \Phi(x) - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\sqrt{3}} + 1 \right), & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 1 - \Phi(x), & x \geq \sqrt{3} \end{cases} \quad (5.10)$$

Deriviranjem (5.10) po  $x$  dobiva se:

$$D'(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \leq -\sqrt{3} \\ \varphi(x) - \frac{1}{2\sqrt{3}}, & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ -\varphi(x), & x \geq \sqrt{3} \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\text{gdje je } \Phi' = \varphi = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

funkcija gustoće vjerojatnosti za  $N(0, 1)$ .

Rješavanjem jednadžbe  $D'(x) = 0$  po  $x$  dobivaju se rješenja  $x_1 = 0,8$  i  $x_2 = -0,8$  iz čega se zaključuje da je

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |D(x)| = |F(0,8) - G(0,8)| = |F(-0,8) - G(-0,8)| \approx 0,057. \quad (5.12)$$

Može se reći da najveća udaljenost između  $F$  i  $G$  približno iznosi  $0,57$ , pa se u vezi sa (5.7) odmah možemo pitati za koje veličine uzorka  $n$  nije moguće razlučiti spomenute distribucije vjerojatnosti, recimo uz razinu značajnosti  $\alpha = 0,05$ . Odgovor se dobiva primjenom relacije (5.7), iz koje proizlazi

$$0,057 \leq \frac{0,84}{\sqrt{n}} \Rightarrow n \leq 218.$$

Prema tome, s manje od 218 podataka nije moguće Kolmogorov - Smirnov testom uz razinu značajnosti  $\alpha = 0,05$ , razlučiti standardnu normalnu distribuciju  $N(0, 1)$  od uniformne distribucije  $U(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

Općenito se može tvrditi da za pouzdani zaključak pri primjeni Kolmogorov - Smirnov testa treba raspolagati sa vrlo velikim uzorkom. Ako se relativno malim uzorkom donese odluka o prihvaćanju hipoteze  $H_0$ , ranija nam razmatranja pokazuju da pretpostavljenu distribuciju  $F_0$  treba s rezervom smatrati stvarnom teorijskom distribucijom kojoj se podvrgavaju dani podaci, jer bi Kolmogorov - Smirnov testom bile prihvatljive i mnoge druge distribucije vjerojatnosti.

Praktična primjena Kolmogorov - Smirnov testa, a slično je i sa hkvadrat-testom, kada se ne raspolaze s dovoljno velikim uzorcima, opravdava se činjenicom da stvarne distribucije vjerojatnosti koje opisuju statističke zakonitosti realnih slučajnih fenomena nisu zapravo, ni normalne, ni uniformne, ni eksponencijalne, itd., već su samo približno normalne, približno uniformne, približno eksponencijalne, itd. Stoga je riječ o tome da se, na bar donekle objektivnan način, utvrdi koji od matematičkih modela dolazi, odnosno ne dolazi, u obzir za opisivanje promatranog realnog statističkog fenomena.

## 5.2.2 Diebold - Mariano test

Predviđanje je od temeljne važnosti u svim znanostima uključujući ekonomiju. Točnost predviđanja je očito važna korisnicima prognoze kao i onima koji predviđaju. Prognoze se koriste za usmjeravanje i koordiniranje odluka. Usporedbe točnosti predviđanja su važne za ekonomiste koji se bave provjerom i i diskriminacijom konkurentskih ekonomskih hipoteza (modela). Provjera adekvatnosti modela je od iznimne važnosti. Stoga ćemo u ovom poglavlju dati pregled metodologije Diebold - Mariano testa.

Uzmimo u obzir dva predviđanja  $(\tilde{y}_{it})_{t=1}^T$  i  $(\tilde{y}_{jt})_{t=1}^T$  vremenske serije  $(y_t)_{t=1}^T$ . Neka su pripadne greške prognoza  $(e_{it})_{t=1}^T$  i  $(e_{jt})_{t=1}^T$ . Želimo procijeniti očekivani gubitak povezan sa svakom prognozom (ili njenom negativnom, točnosti). Od velike je važnosti, i gotovo uvijek zanemarena, činjenica da se ekonomski gubitak povezan s prognozom može loše ocijeniti uobičajenim statističkim mjerama. To znači da se prognoze koriste za usmjeravanje odluka, a gubitak povezan s predviđenom pogreškom određenog znaka i veličine izravno je potaknut prirodom postojećeg problema. Kada se uzme u obzir raznolikost odluka koje poduzimaju ekonomski subjekti vođeni prognozama (npr. Odluke o zaštiti rizika, odluke o zalihama, odluke o politici, odluke o rashodima za oglašavanje, odluke o određivanju javnih komunalnih naknada itd.), Činjenica je da je gubitak povezan s određenom prognostičkom pogreškom je generalno asimetrična funkcija greške, čak i ako je simetrična, svakako se ne treba zadovoljiti standardnim primjerom kao što je MSPE (Srednja kvadratna progreška predviđanja, ngl. *Mean squared prediction error*). Stoga dozvoljavamo vremenski gubitak  $t$  povezan

sa prognozom  $i$  da je proizvoljna funkcija realizacije i predikcije  $g(y_t, \tilde{y}_{it})$ . U mnogim primjenama, funkcija gubitka će biti direktna funkcija pogreške predviđanja tj.  $g(y_t, \tilde{y}_{it}) = g(e_{it})$ . Radi lakše ekonomske notacija nadalje pišemo  $g(e_{it})$  te u samo specijalnim slučajevima raspisivanja metodologije  $g(y_t, \tilde{y}_{it})$ .

Nulta hipoteza o jednakosti prognostičke točnosti dvije prognoze je dana sljedećim izrazom:

$$H_0 : \mathbb{E}[g(e_{it})] = \mathbb{E}[g(e_{jt})] \quad (5.13)$$

ili može biti dana sljedećim izrazom:

$$H_0 : \mathbb{E}[d_1] = 0 \quad (5.14)$$

pri čemu je funkcija gubitaka predočena odstupanjima između  $d_1 = [g(e_{it}) - g(e_{jt})]$ .

Postoje još dvije vrste DM testa prema različitim definicijama funkcije gubitaka. Funkcija gubitaka može biti definirana sa  $d_1 = |g(e_{it}) - g(e_{jt})|$  gdje se uzimaju apsolutne vrijednosti odstupanja. Druga definicija je  $d_1 = [g(e_{it}) - g(e_{jt})]^2$  pri čemu se uzimaju kvadrati odstupanja.

Dakle, "jednakost točnosti" nulte hipoteze je ekvivalentan nultoj hipotezi da je očekivanje funkcije gubitka jednako nuli.

Nadalje će se opisati asimptotsko ponašanje testa. Uzmimo u obzir  $(d_t)_{t=1}^T$  vremensku seriju diferencijala gubitka. Ako je vremenska serija diferencijala gubitka kovarijančno stacionarna, standardni rezultati se mogu iskoristiti za dedukciju asimptotske distribucije od uzorka očekivanja diferencijala gubitka.

Vrijedi:

$$\sqrt{T}(\tilde{d} - \mu) \rightarrow N(0, 2\pi f_d(0)), \quad (5.15)$$

pri čemu je

$$\tilde{d} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [g(e_{it}) - g(e_{jt})] \quad (5.16)$$

uzorak očekivanja diferencijala gubitka, a

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma_d(\tau) \quad (5.17)$$

je funkcija gustoće vjerojatnosti gubitaka pri nultoj frekvenciji.

$$\gamma_d(\tau) = \mathbb{E}[(d_t - \mu)(d_{t-\tau} - \mu)]$$

je autokoovarianca diferencijala gubitka u trenutku  $\tau$ , a  $\mu$  je očekivanje populacije diferencijala gubitka. Formula za  $f_d(0)$  pokazuje da korekcija korelacije vremenske serije može biti značajna, čak iako je diferencijal gubitka samo tjedno koreliran zbog akumulacije autokovarijance.

Budući da je kod veliki uzoraka odnosno vremenskih serija uzoračko očekivanje diferencijala gubitka  $\tilde{d}$  aproksimativno normalno distribuirano sa očekivanjem  $\mu$  i varijancom  $\frac{2\pi f_d(0)}{T}$ , očito veliki uzorak  $N(0, 1)$  za testiranje nulte hipoteze o jednakoj prognostičkoj točnosti je:

$$S_1 = \frac{\tilde{d}}{\sqrt{\frac{2\pi f_d(\tilde{0})}{T}}} \quad (5.18)$$

pri čemu je  $f_d(\tilde{0})$  konzistentna procjena  $f_d(0)$ .

Prateći standardnu metodologiju, konzistentnu procjenu  $f_d(0)$  dobivamo uzimajući zbroj težinskih faktora dostupnih uzoračkih autokovarijanci,

$$2\pi f_d(\tilde{0}) = \sum_{\tau=-(T-1)}^{(T-1)} 1 \frac{\tau}{S(T)} \tilde{\gamma}_d(\tau) \quad (5.19)$$

pri čemu je

$$\tilde{\gamma}_d(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=\tau+1}^T (d_t - \tilde{d})(d_{t-\tau} - \tilde{d}), \quad (5.20)$$



pri čemu su  $1(\tau/S(t))$  i  $S(T)$  pomaci.

Kako bi se lakše odabrali pomaci (koji su se pokazali korisnima u praksi), potrebno je prisjetiti se poznatog rezultata gdje optimalni korak  $k$  za prognostičke greške najviše  $(k - 1)$ -ovisan. U praktičnoj primjeni  $(k - 1)$ -ovisnost može biti prekršena zbog mnogih razloga. Unatoč tome, je razumljivo uzeti  $(k - 1)$ -ovisnost kao razuman pokazatelj za  $k$ -korak naprijed za prognostičke pogreške (i pretpostavka se može lako iskoristiti empirijski). U empirijskim istraživanjima to sugerira privlačnost uniformnog pomaka definiranog kako slijedi:

$$1\frac{\tau}{S(T)} = \begin{cases} 1, & |\tau/S(T)| \leq 1 \\ 0, & \text{inace} \end{cases} \quad (5.21)$$

$(k - 1)$ -ovisnost ukazuje na to da se trebaju koristiti samo  $(k - 1)$  uzorci autokovarijance kod procjene  $f_d(0)$  jer su svi ostali 0, tako da je  $S(T) = (k - 1)$ . To je legitimno (tj. procjenitelj je konzistentan) pri  $(k - 1)$ -ovisnosti tako dugo dok se koristi uniformni pomak, jer uniformni pomak dodjeljuje težinu jedinice svim uključenim autokovarijancama. Budući da je Dirichletov spektralni pomak povezan s pravokutnim zaobilaznim pomakom na određenim mjestima se spušta ispod 0, rezultirajuća procjena funkcije spektralne gustoće nije zajamčena kao pozitivna semidefinitna. Veliki pozitivni težinski faktor koji je povezan sa Dirichlet kernelom vrlo malo vjerojatno može dobiti negativne procjene  $f_d(0)$ . U aplikacijama, u rijetkom slučaju kada se javlja negativna procjena, tretiramo ga kao 0 i automatski odbacujemo nultu hipotezu jednake točnosti predviđanja. Ako se smatra posebno važnim za nametanje nenegativnosti procijenjene spektralne gustoće, ono se može nametnuti uporabom Bartlettovog pomaka, odgovarajućeg nenegativnog Fejer spektralnog pomaka (Neweyja, Westa 1987), gdje se usklađuje s veličinom uzorka. Naravno, mogući su i drugi pomaci i postupci odabira zaostajanja.

Ponekad je u praksi dostupno samo nekoliko promatranih procjena pogreški. Jedan od pristupa u takvim situacijama je pokretanje naše asimptotske statističke analize. Malo se zna o asimptotičkoj valjanosti prvoga reda bootstrap metode u ovoj situaciji, a kamoli kod asimptotske metode višeg reda ili stvarnoj izvedbi konačnih uzoraka. Stoga je korisno imati na raspolaganju precizna testove konačnih uzoraka precizne točnosti, kako bi se upotpunio prethodno opisani asimptotički test. Dva snažna takva testa temelje se na promatranim diferencijalima gubitaka - Test predznaka i Wilcoxon test.

Kod testa predznaka nulta hipoteza je:

$$H_0 : \text{med}(g(e_{it}) - g(e_{jt})) = 0 \quad (5.22)$$

Potrebno je napomenuti razliku između medijana razlika diferencijala gubitka i razlike medijana diferencijala gubitka tj.

$$\text{med}(g(e_{it}) - g(e_{jt})) \neq \text{med}(g(e_{it})) - \text{med}(g(e_{jt})).$$

Zbog toga je manja razlika od ranije navedenog asimptotske test statistike  $S_1$ . Unatoč tome ima značajnu i intuitivnu interpretaciju

$$\mathbb{P}(g(e_{it}) > g(e_{jt})) = \mathbb{P}(g(e_{it}) < g(e_{jt})).$$

Ako je diferencijal gubitaka simetrično distribuiran, onda nulta hipoteza o nula medijanu diferencijala gubitaka odgovara ranije navedenoj nuli, jer su u tom slučaju očekivanje i medijan jednaki. Simetrija je empirijske prirode i može se iskoristiti standardnim procedurama. U dosadašnjoj literaturi je pokazano da simetrične vremenske serije diferencijala gubitaka su česte u praksi.

Konstrukcija test statistike je vrlo jasna. Pretpostavimo da je vremenska serija diferencijala gubitaka i.i.d. Broj pozitivnih diferencijala gubitaka obzervacija u uzorku veličine  $T$  ima binomnu distribuciju vjerojatnosti sa parametrima  $T$  i  $\frac{1}{2}$  pod nultom hipotezom. Test statistika je dana kako slijedi:

$$S_2 = \sum_{t=1}^T I_+(d_t), \quad (5.23)$$

pri čemu je

$$I_+(d_t) = \begin{cases} 1, & d_t > 0 \\ 0, & \text{inace} \end{cases} \quad (5.24)$$

Značajnost može biti obrađena korištenjem tablice kumulativne binomne distribucije vjerojatnosti. Kod velikih uzoraka test statistika prati normalnu jediničnu distribuciju vjerojatnosti kako slijedi:

$$S_{2a} = \frac{S_2 - 0.5T}{\sqrt{0.25T}} \sim N(0, 1). \quad (5.25)$$

Srodan postupak bez distribucije koji zahtijeva simetriju diferencijala gubitaka (ali u tom slučaju može biti i snažniji od testa znakova) je Wilcoxonov test ranga. Ponovno pretpostavljamo da je vremenska serija diferencijala gubitaka i.i.d. Test statistika je dana kako slijedi:

$$S_3 = \sum_{t=1}^T I_+(d_t) \text{rang}(|d_t|), \quad (5.26)$$

pri čemu imamo zbroj rangova apsolutne vrijednosti pozitivnih obzervacija. Egzaktne kritične vrijednost kod konačnog uzorka test statistike u invarijantni distribuciji vjerojatnosti diferencijala gubitaka. Trebala bi imati očekivanje nula i biti simetrična. Nadalje asimptotski test statistika je distribuirana kako slijedi:

$$S_{3a} = \frac{S_3 - \frac{T(T+1)}{4}}{\sqrt{\frac{T(T+1)(2T+1)}{24}}} \sim N(0, 1). \quad (5.27)$$

Ovaj test je važan za vrlo široku klasu funkcija gubitka. Posebno, funkcija gubitka ne mora biti kvadratna i ne mora biti simetrična ili kontinuirana. Drugo, lako se prihvaćaju različite realistične značajke pogrešaka prognoziranja. Pogreške predviđanja mogu biti ne-nula očekivanja, nenormalna i korelirana. Dodatak za istovremenu korelaciju; osobito je važno jer su usporedbe prognoziranja opet prognoze istog ekonomskog vremenskog niza i zato što se skupovi informacija prognoza u velikoj mjeri preklapaju, tako da se greške u prognozi često međusobno koreliraju. Štoviše, statistika asimptotskog testa  $S_1$ , naravno, može nositi serijski prevedenu razliku gubitaka. To je potencijalno važno jer su, kao što je već rečeno, čak i optimalne pogreške prognoze u pravilu serijski povezane. Serijska povezanost predstavlja više problema za točnu test statistiku konačnih uzoraka  $S_2$ , a  $S_3$  i njihove asimptotske srodnike  $S_{2a}$  i  $S_{3a}$ , a zbog toga što elementi skupa svih mogućih kombinacija nizova diferencijala gubitaka uzorka nisu vjerojatni. kada se podaci serijski povežu, što krši pretpostavke na kojima se temelje takvi randomizacijski testovi.

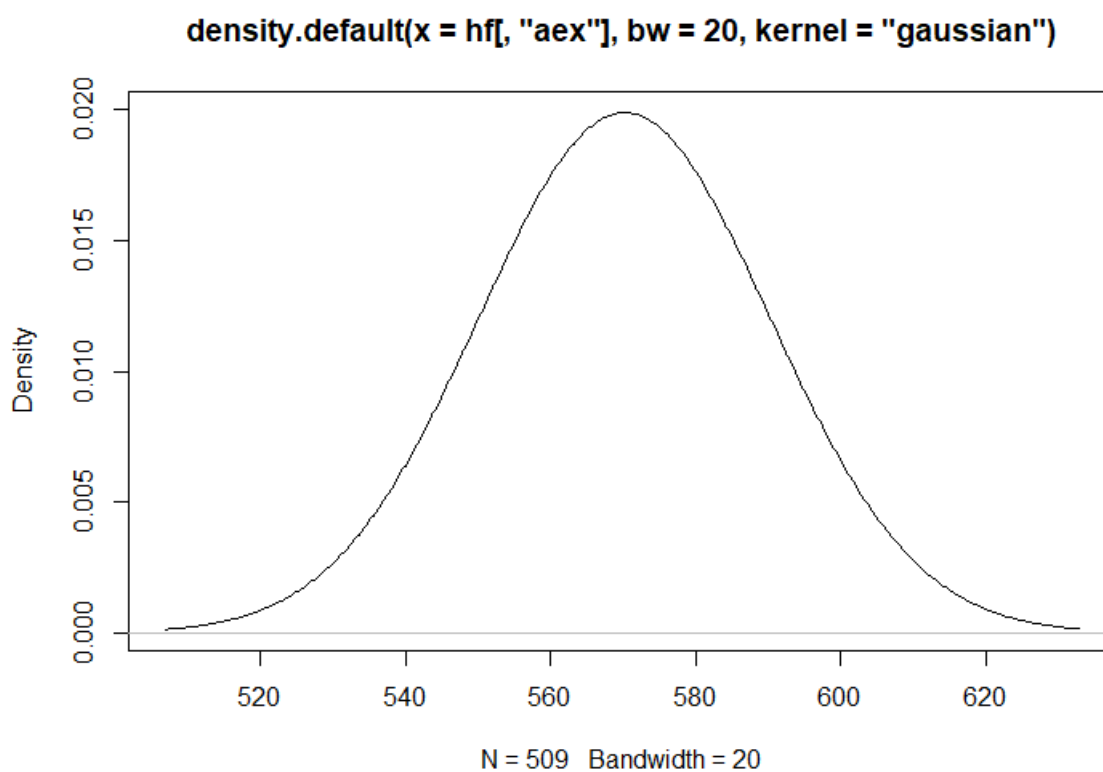
### 5.3 Stabilnost parametara

U ovom poglavlju će se opisati što je to ispitivanje stabilnosti parametara. Implikirane funkcije gustoće vjerojatnosti procijenjene iz presjeka promatranih cijena opcija kupnje i prodaje dobivaju na sve većoj pozornosti te se koriste u istraživanju ovog poslijediplomskog specijalističkog rada. Oni se koriste za određivanje cijena složenih financijskih instrumenata kao što su derivati. U dosadašnjoj literaturi brojni su autori koristili implikirane funkcije gustoće vjerojatnosti kao pokazatelje tržišnog raspoloženja kako bi ispitali mogu li tržišta opcija anticipirati značajne gospodarske događaje odnosno procijeniti tržišna očekivanja. Čak su i središnje banke posebno zainteresirane za korištenje impliciranih funkcija gustoća vjerojatnosti za procjenu očekivanja tržišnih sudionika i investicijskog sentimenta od promjena kamatnih stopa, cijena dionica i tečajeva. U dosadašnjoj literaturi su razvijene brojne metode za procjenu impliciranih funkcija gustoća vjerojatnosti. Međutim, malo pozornosti je posvećeno robusnosti tih procjena ili povjerenju krajnjih korisnika (malih ili institucionalnih investitora) ka krajnjim zaključcima dobivene statistike i rezultata. Nadalje, potrebno je testirati apsolutnu i relativnu robusnost modela vrednovanja opcija pomoću kojih se dobivaju implikirane funkcije gustoće vjerojatnosti te izmjeriti male greške kod zabilježenih cijena opcija kupnje i prodaje. Metodologija je da se cijene opcija "šokiraju" za malu razinu pogreške, npr. dodaju se na slučajan način uniformne vrijednosti između intervala  $[-0.5, 0.5]$ . Nakon toga se ponovo procjenjuje implikirana funkcija gustoće vjerojatnosti te se postupak ponavlja više puta. Nakon više ponavljanja navedenog postupka, pokazat će se kod kojeg modela vrednovanja opcija se parametri ne razlikuju odnosno kod kojeg modela su parametri stabilni tj. neosjetljivi na "šokove" (Bliss et. al., 2002). To upućuje na provjeru robusnosti. Dakle, ako su parametri stabilni model je robusan. Osnova metodologije jest mala slučajna perturbacija cijene opcije. Veličina promjene predstavlja minimalnu nesigurnost vezanu uz cijene opcija. U dosadašnjoj literaturi testovi se provode pomoću financijskih instrumenata derivata kao terminskih ugovora i opcija na glavne tržišne indekse. Rezultati su pokazali da Dvostruko log-normalna metoda koja zbraja implikirane funkcije gustoće vjerojatnosti sustavno manje stabilna od Izgladene metode implikirane volatilnosti te je zaključeno da Izgladena implikirana volatilnost metoda dominira Dvostrukom log-normalom metodom kao tehnikom za procjenu implicitnih funkcija gustoće vjerojatnosti (Bliss et. al., 2002).

## 6 Empirijski rezultati izabranih dioničkih tržišta

### 6.1 Rezultati procjena realiziranih funkcija gustoća vjerojatnosti pomoću visokofrekventnih podataka

U ovom poglavlju daju se rezultati Kernelovog procjenitelja odnosno rezultate procjena realiziranih funkcija gustoća vjerojatnosti pomoću visokofrekventnih podataka. Slijedi pregled rezultata za sve promatrane tržišne indekse. Ove procjene su dobivene na temelju visokih frekvencija opaženih svake minute tijekom službenog vremena trgovanja svake od promatranih burzi. Grafički rezultati su dani kronološki za svaki burzovni indeks kako slijedi.



Slika 1: Kernelov procjenitelj za index AEX na datum dospijeca 20.07.2018.

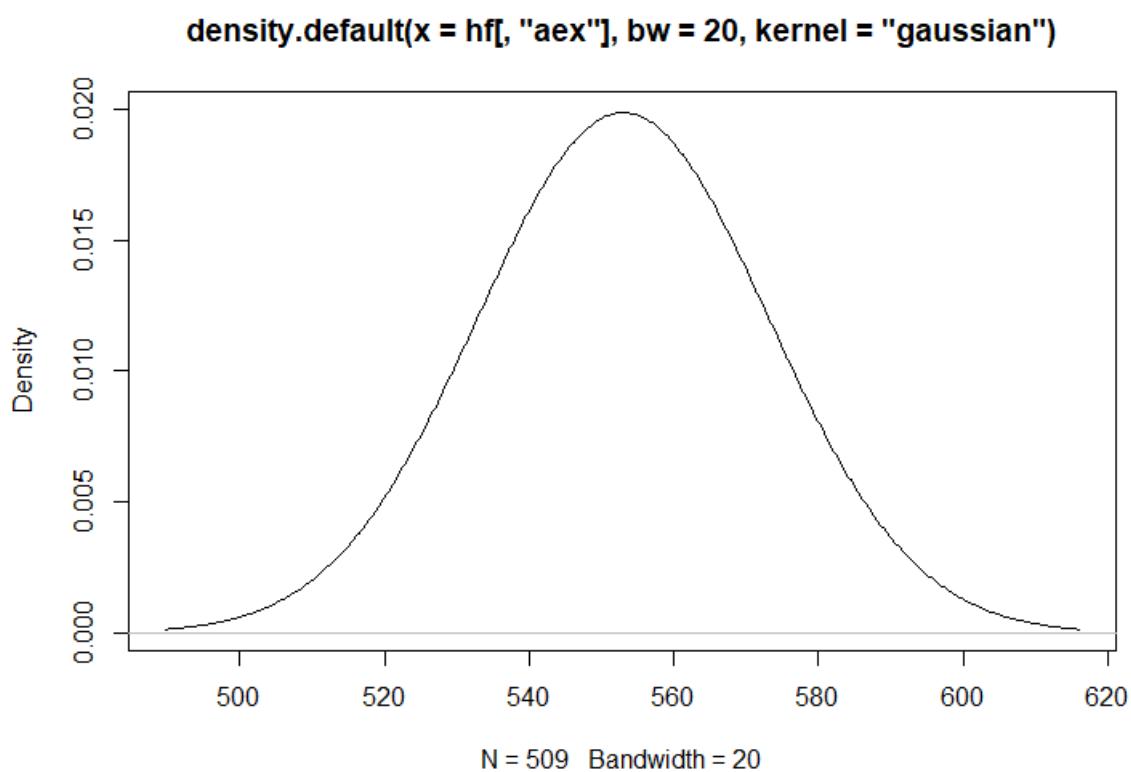
Graf prikazuje Kernelov procjenitelj za burzovni indeks AEX na datum dospijeca 20.07.2018. Širina Kernelovog procjenitelja je 20. Ova procjena realizirane funkcije

gustoće vjerojatnosti se koristi u daljnjem vrednovanju prognostičke moći modela opcija u sljedećem potpoglavlju.

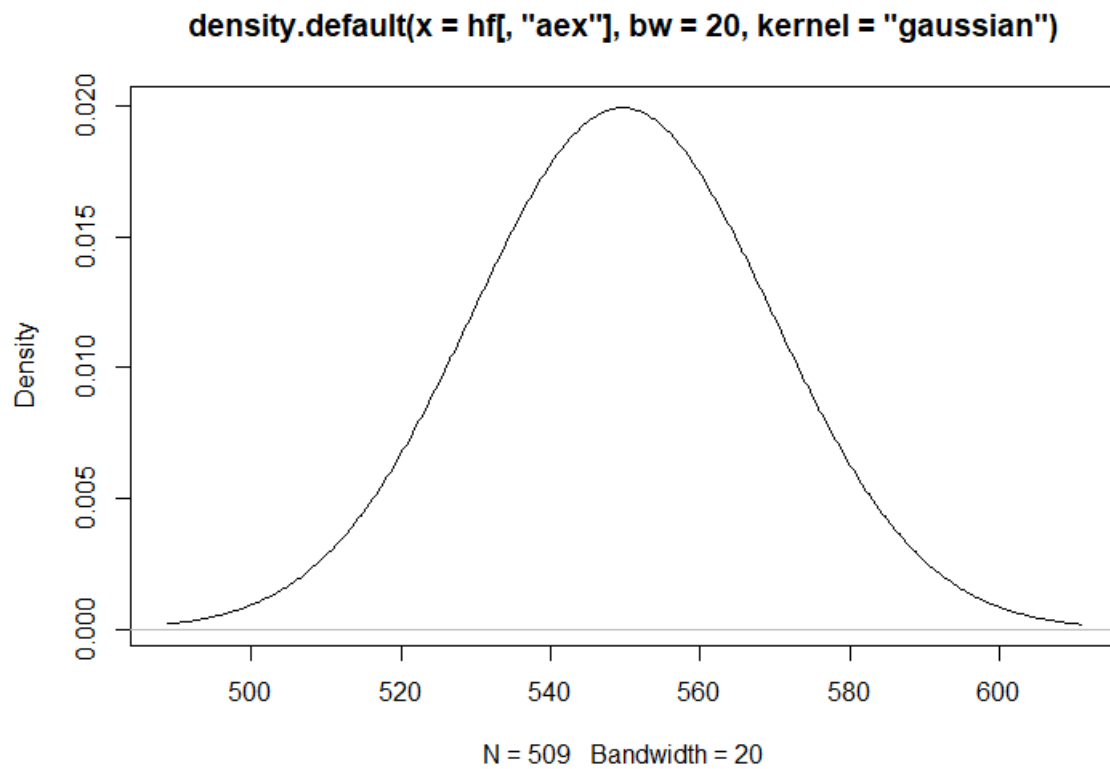
Momenti	Vrijednosti
$\mu$	570,19
$\sigma$	19,89
$\alpha_3$	0,46
$\alpha_4$	1,68

Tablica 3: Deskriptivna statistika Kernelovog procjenitelja za datum dospjeća 20.07.2018.

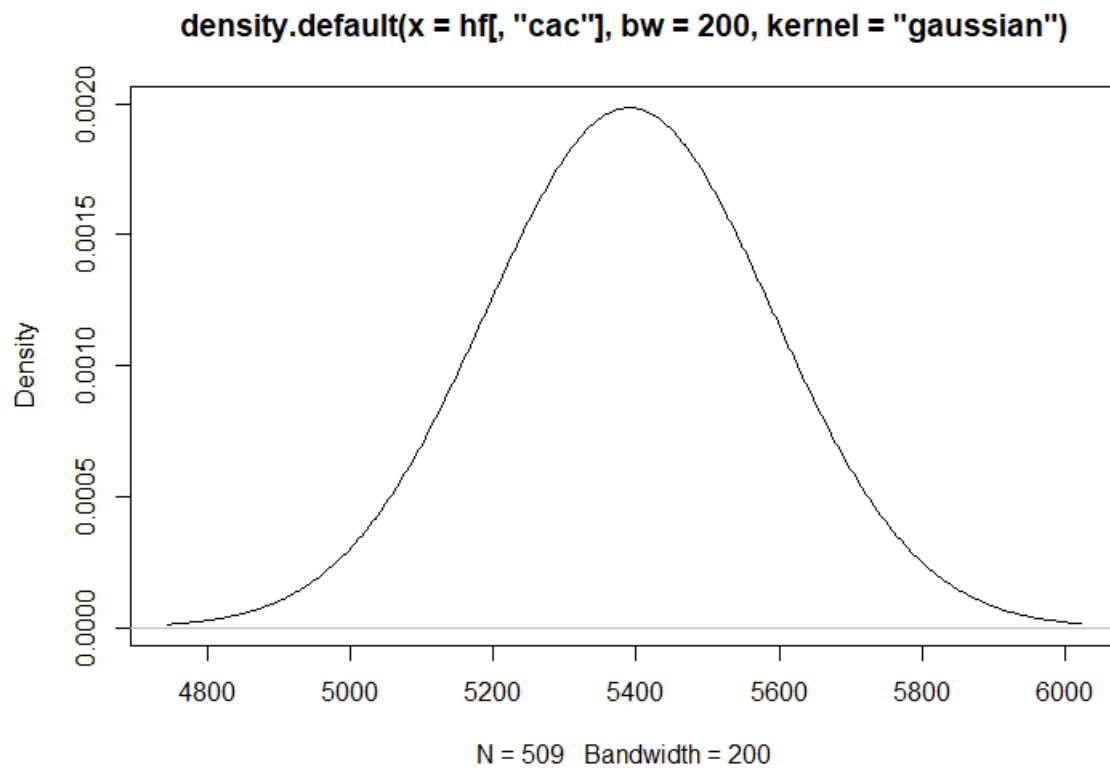
Tablica daje prikaz deskriptivne statistike Kernelovog procjenitelja na datum dospjeća 20.07.2018. Dana su sva četiri momenta (sredina, standardna devijacija, asimetrija i zaobljenost) čime je opisana distribucija Kernelovog procjenitelja.



Slika 2: Kernelov procjenitelj za index AEX na datum dospjeća 17.08.2018.

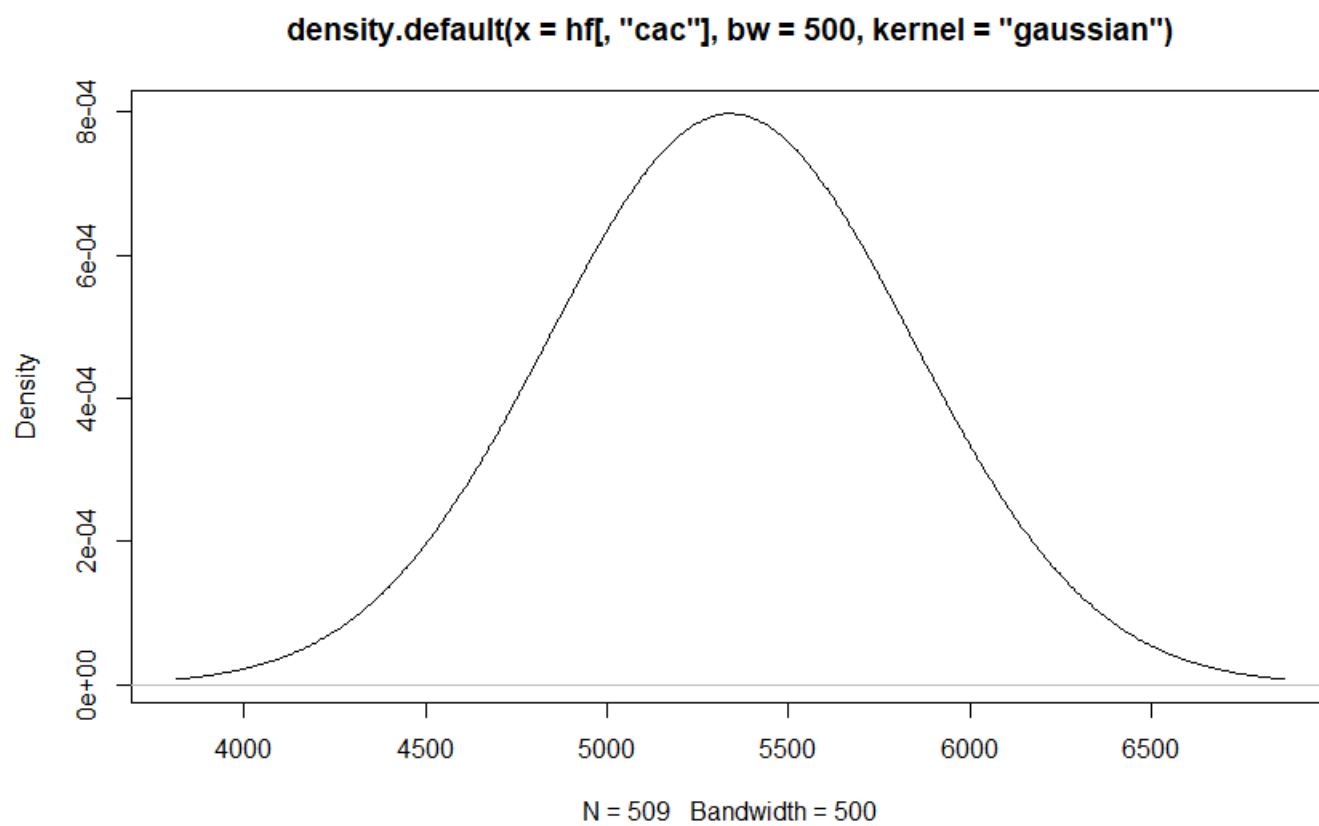


Slika 3: Kernelov procjenitelj za index AEX na datum dospijeća 21.09.2018.

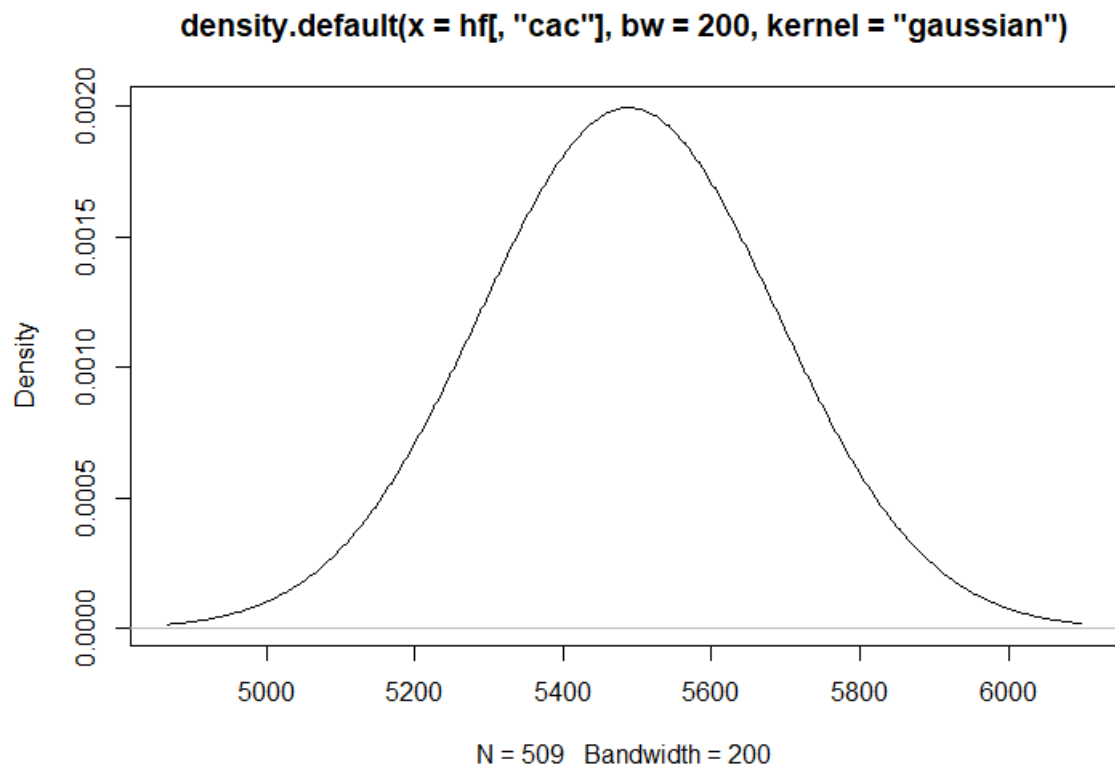


Slika 4: Kernelov procjenitelj za indeks CAC na datum dospijeća 20.07.2018.

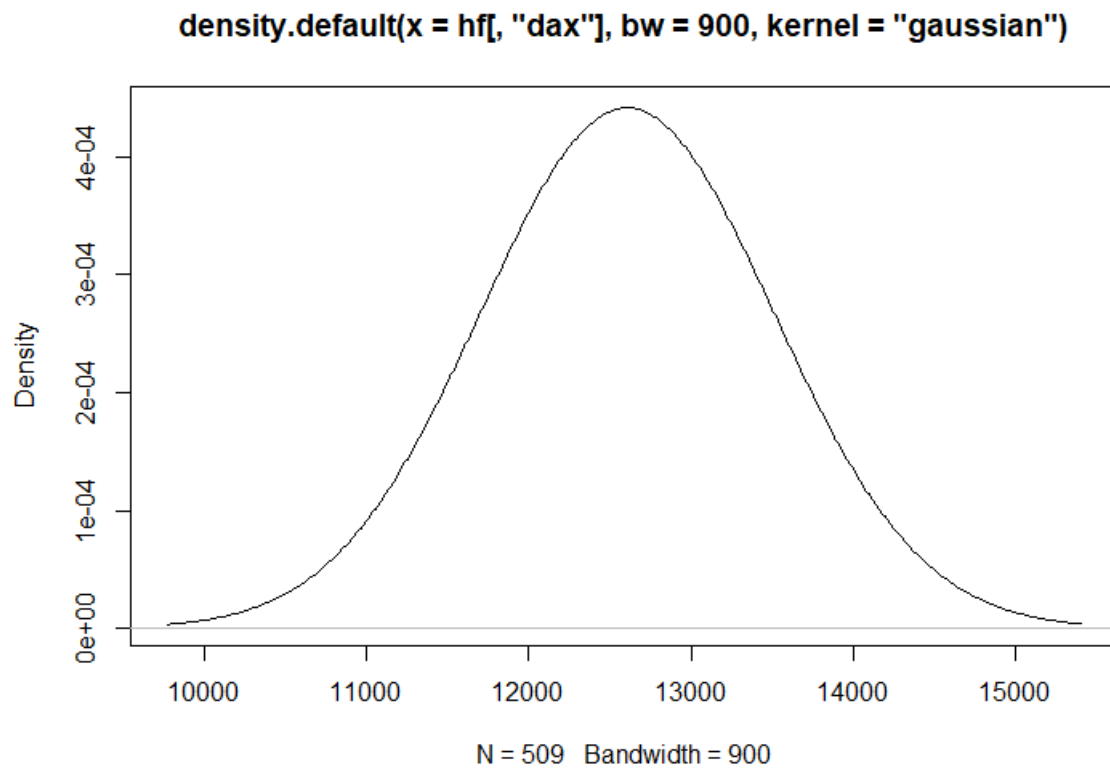




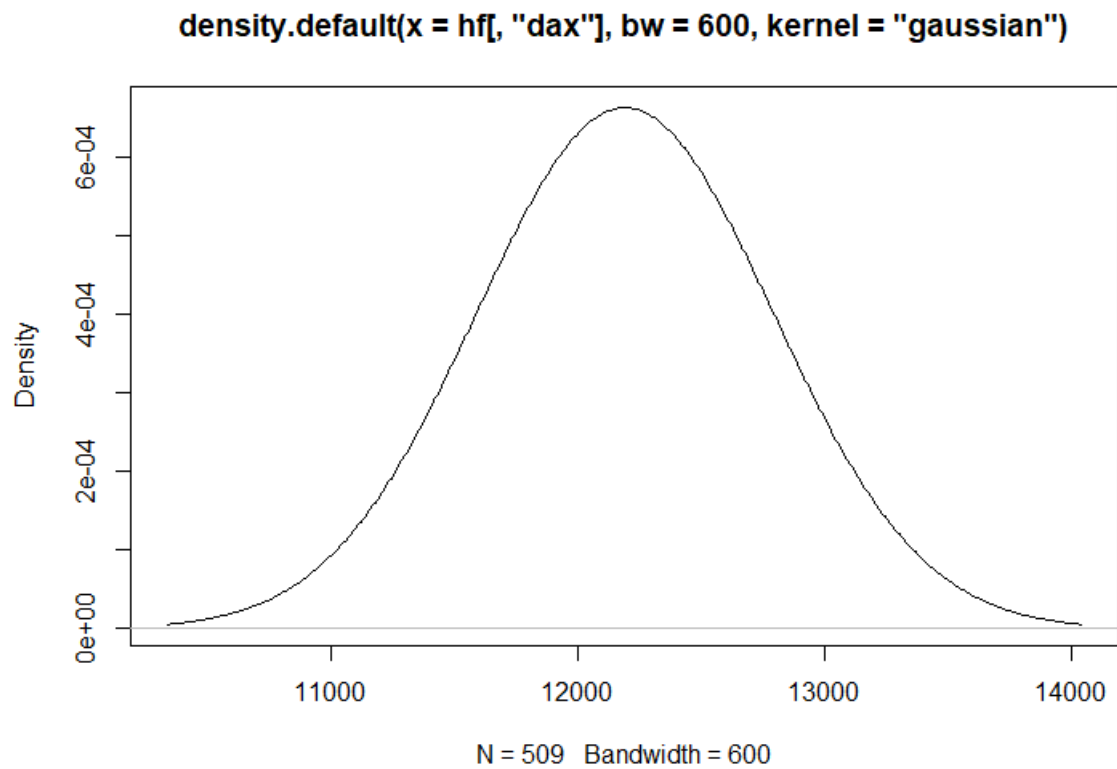
Slika 5: Kernelov procjenitelj za indeks CAC na datum dospijeća 17.08.2018.



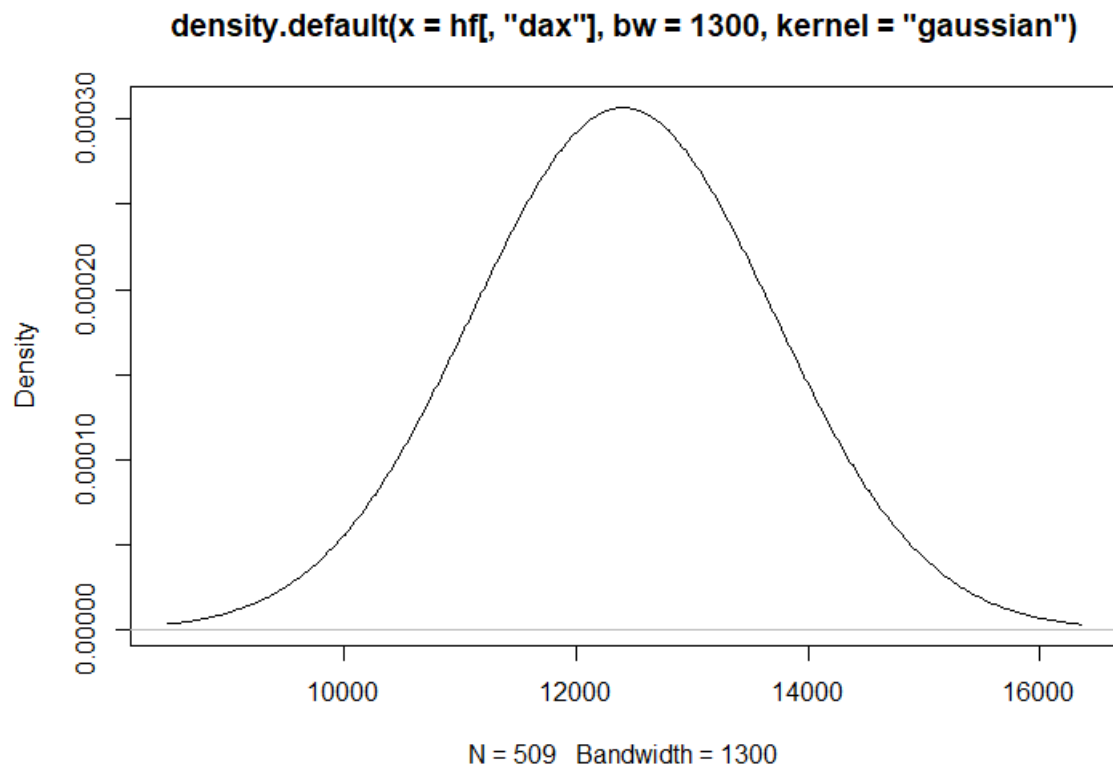
Slika 6: Kernelov procjenitelj za indeks CAC na datum dospijeća 21.09.2018.



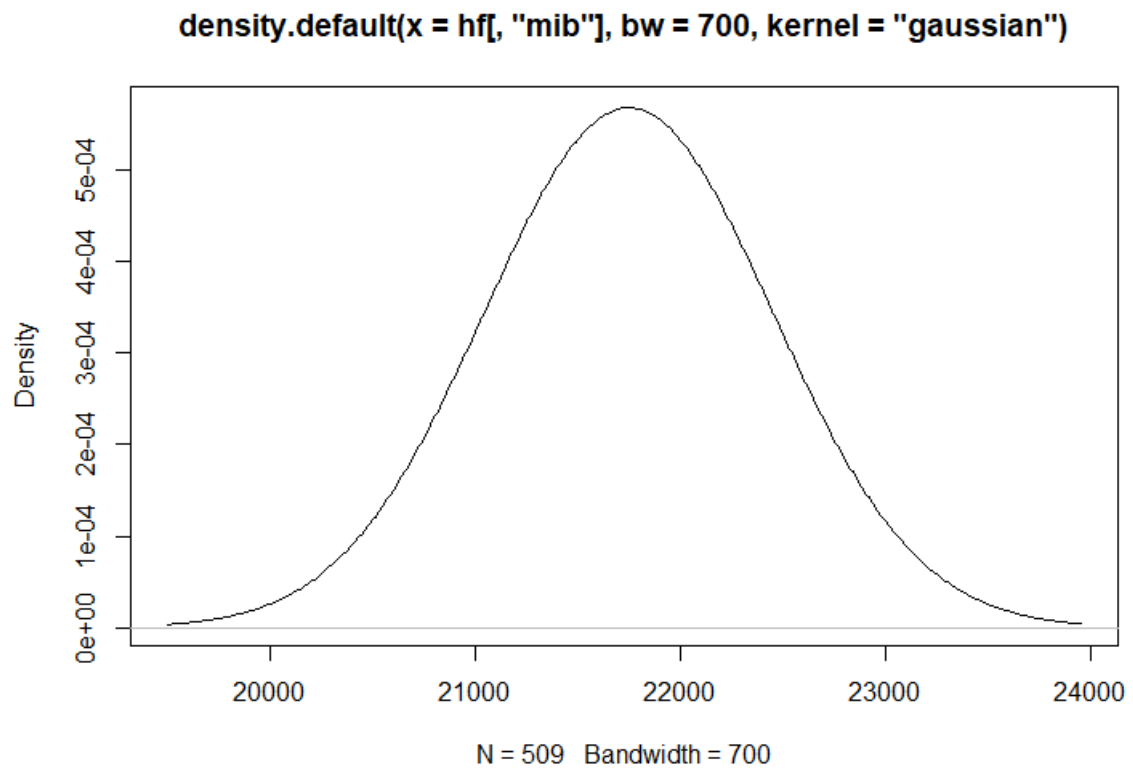
Slika 7: Kernelov procjenitelj za index DAX na datum dospijeća 20.07.2018.



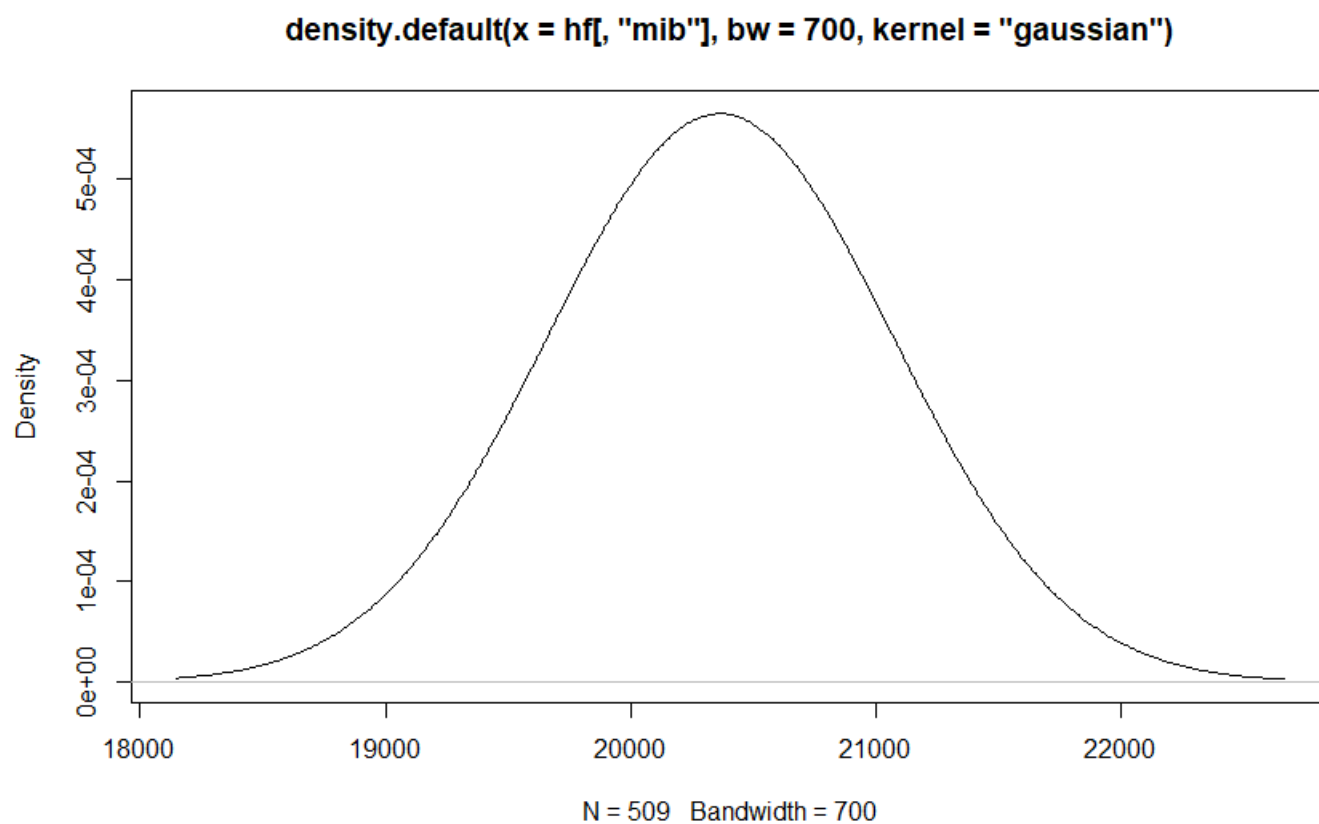
Slika 8: Kernelov procjenitelj za index DAX na datum dospijeća 17.08.2018.



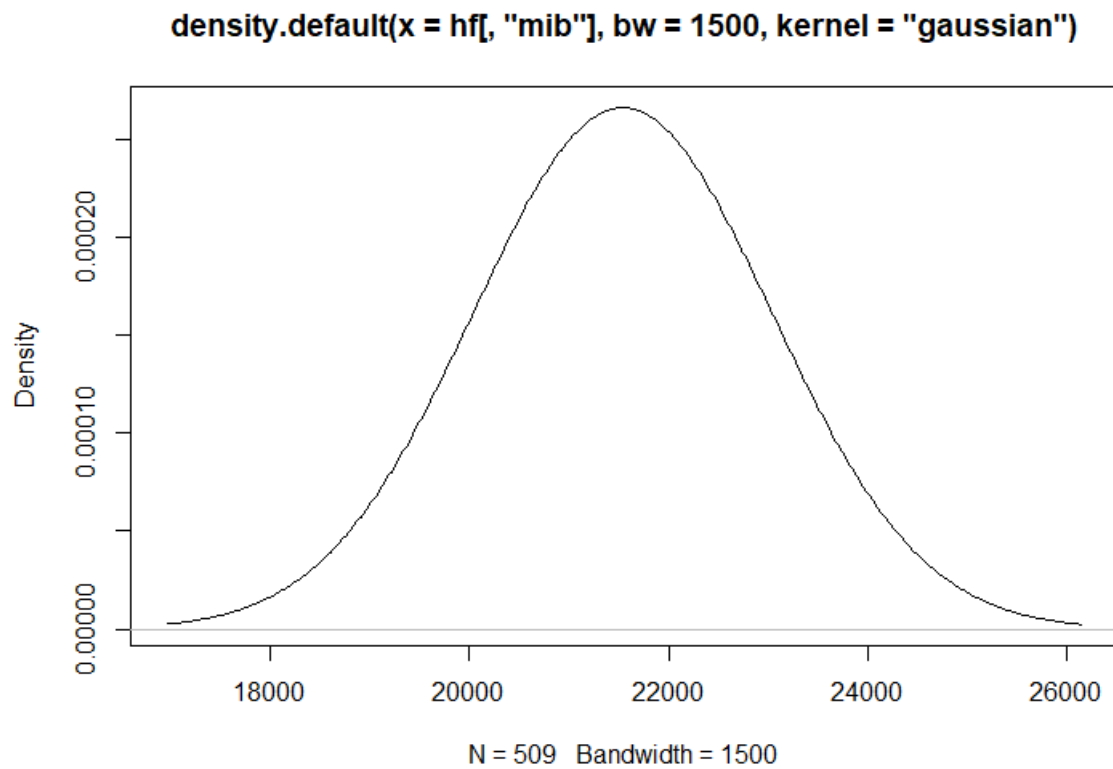
Slika 9: Kernelov procjenitelj za index DAX na datum dospijeća 21.09.2018.



Slika 10: Kernelov procjenitelj za indeks MIB na datum dospijeća 20.07.2018.



Slika 11: Kernelov procjenitelj za indeks MIB na datum dospijeća 17.08.2018.



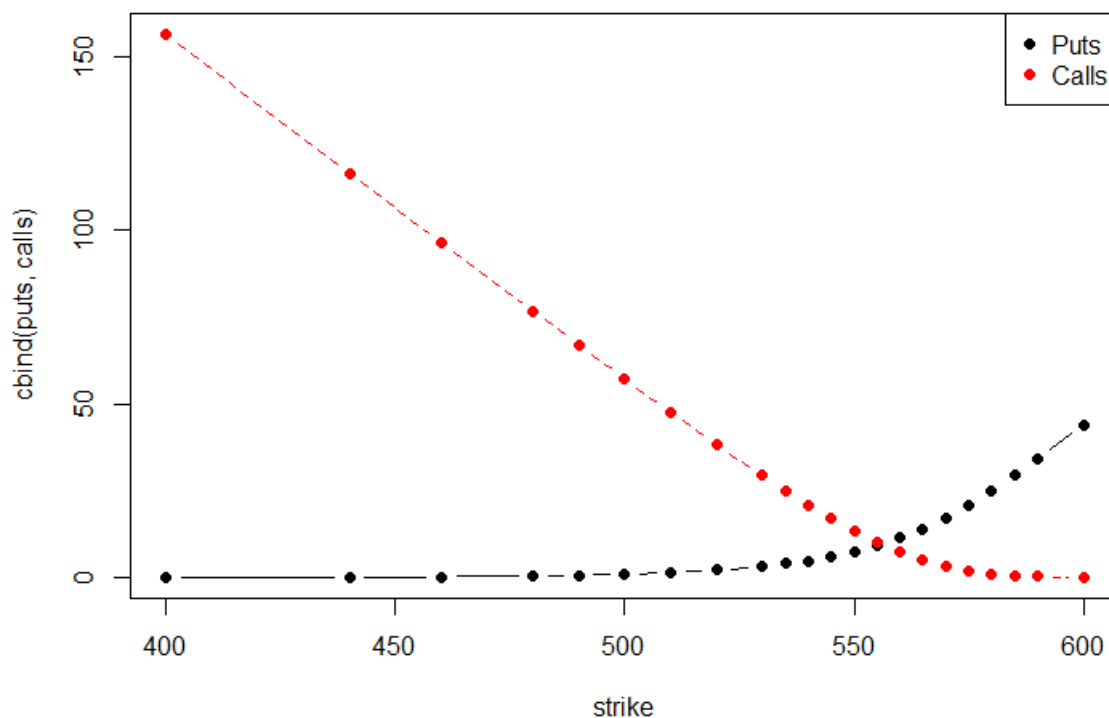
Slika 12: Kernelov procjenitelj za indeks MIB na datum dospijeća 21.09.2018.



## 6.2 Rezultati procjena impliciranih funkcija gustoća vjerojatnosti odabranih opcijskih modela

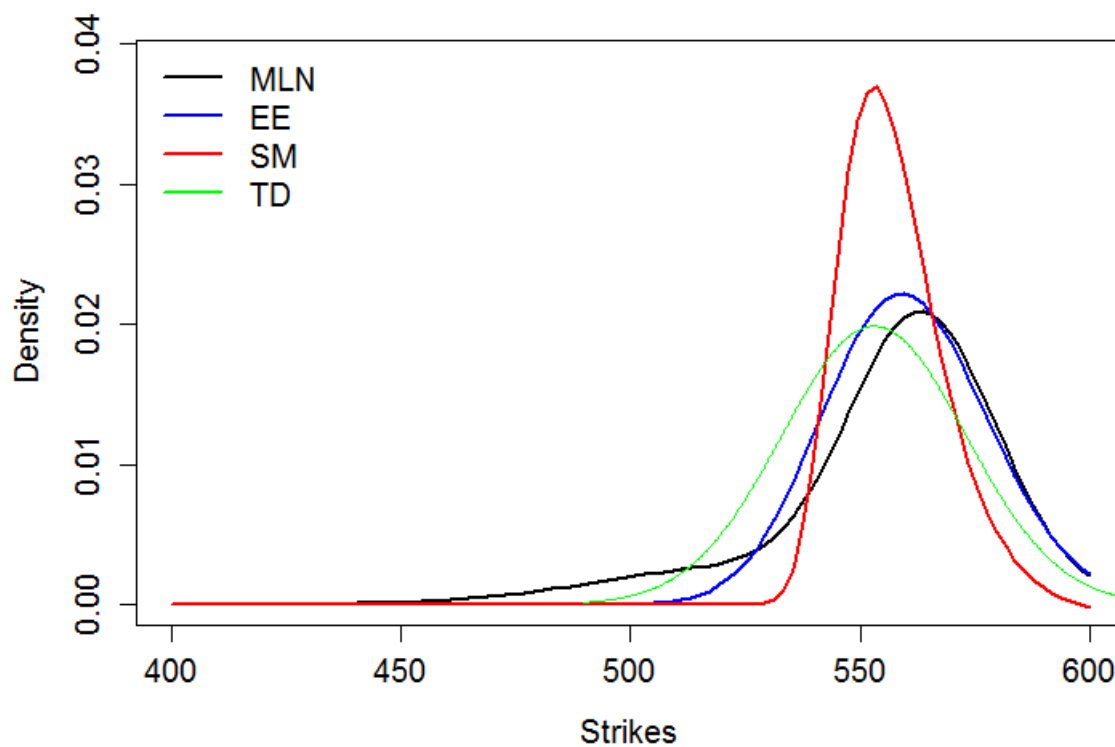
U ovom poglavlju ćemo redom prikazati grafički korištene podatke, rezultate usporedbe procjena gustoća vjerojatnosti neutralnih na rizik pomoću korištenih modela vrednovanja opcija i Kernelovog procjenitelja uz procijenjene parametre. Rezultate dajemo za sve promatrane tržišne indekse i kombinacije datuma opažanja i datuma dospijeca. Za cijene opcija kupnje i prodaje uzimate su sredine između ponuđene (*engl. bid*) i tražene (*engl. ask*) cijene. Za nerizičnu kamatnu stopu se uzima EURIBOR nerizična kamatna stopa za promatrani period u ovisnosti o horizontu predviđanja. U ovom poslijediplomskom specijalističkom radu horizonti predviđanja su bili razni s obzirom da su datumi opažanja bili 23.03.2018., 20.04.2018., 18.05.2018. i 22.06.2018 te datumi dospijeca 20.07.2018., 17.08.2018. i 21.09.2018. Pretpostavljeno je da nije bilo isplata dividendi.

Slijede rezultati za AEX (Amsterdam Exchange index) tržišni indeks.



Slika 13: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018.

Graf daje uvid u kretanje cijena opcija kupnje i prodaje. Krivulje se sijeku na datum opažanja 22.06.2018. kada je vrijednost burzovnog indeksa AEX bila 560,34. Upravo je ta vrijednost indeksa AEX korištena prilikom procjene impliciranih funkcija gustoće vjerojatnosti odabranih opsijskih modela. Iz grafa je vidljivo kako se cijena izvršenja povećava tako se i cijena opcije kupnje smanjuje. Istovremeno, cijena opcije prodaje se ponaša suprotno te raste kako se cijena izvršenja povećava. Dakle, ovim grafom je pokazan utjecaj na promjene cijena izvršenja na cijene opcije.



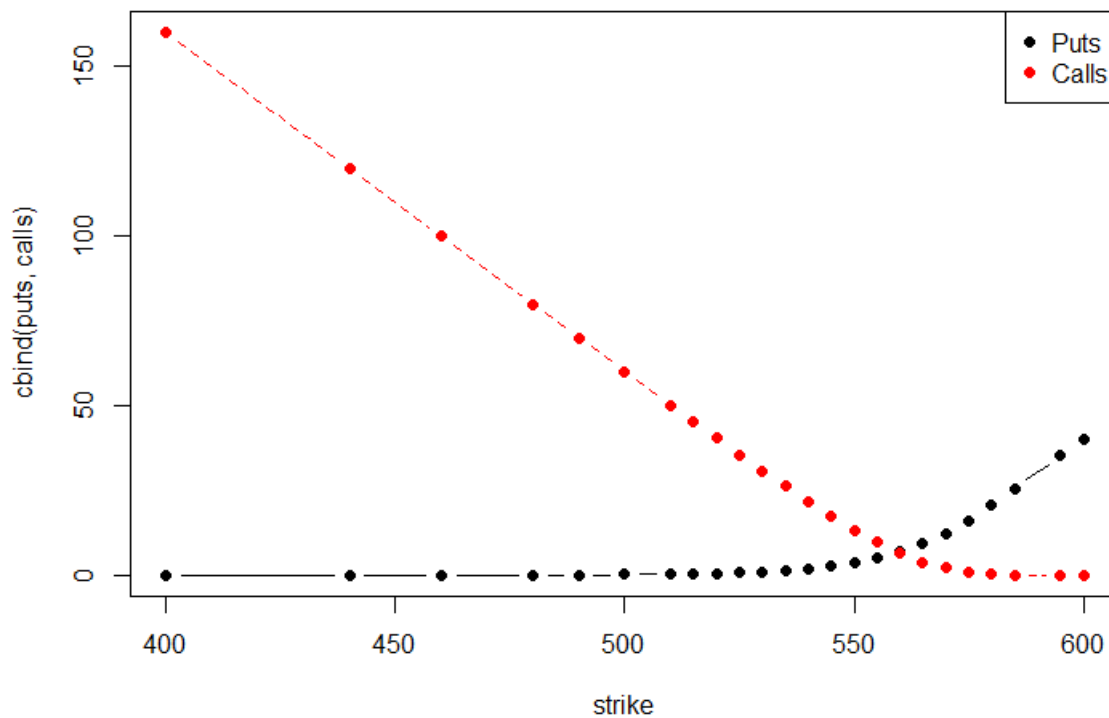
Slika 14: Rezultati usporedbe na datum dospijeca 17.08.2018. i datum opažanja 22.06.2018.

Graf daje rezultate usporedbe impliciranih funkcija gustoće vjerojatnosti korištenih opcijskih modela (MLN, EE, SM) te procjena realizirane funkcije gustoće vjerojatnosti pomoću visokofrekventnih podataka (TD).

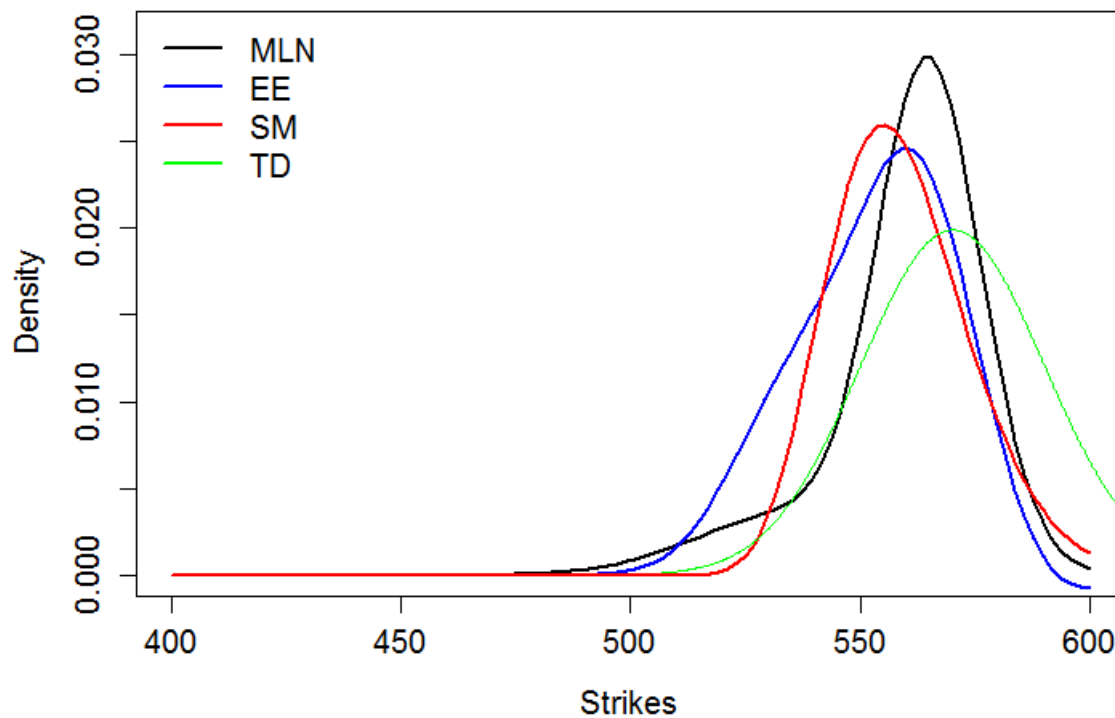
Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,22
mln.meanlog.1	6,27
mln.meanlog.2	6,33
mln.sdlog.1	0,06
mln.sdlog.2	0,02
ew.sigma	0,08
ew.skew	0,15
ew.kurt	0,00
a0	0,49
a1	-0,00
a2	0,00

Tablica 4: Procijenjeni parametri na datum dospijeca 17.08.2018. i datum opažanja 22.06.2018.

Procijenjeni parametri u prethodnoj tablici su redom: mln.alpha.1 je ponder, mln.meanlog.1 i mln.meanlog.2 su sredine log-normalnih distribucija, mln.sdlog.1 i mln.sdlog.2 su njihove standardne devijacije u Mixture Log-Normal modelu, ew.sigma, ew.skew i ew.kurt su prva tri momenta Edgeworthove ekspanzije, a0, a1 i a2 su paramteri kubne interpolacije odnosno kubnog spline-a u modelu Shimko.



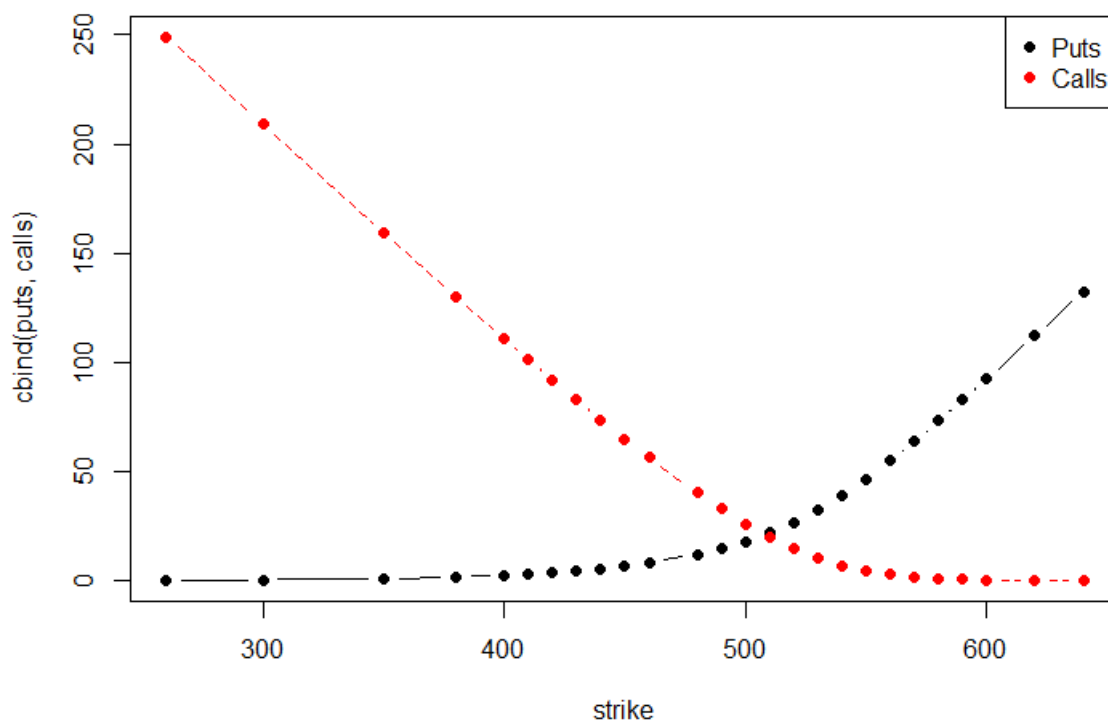
Slika 15: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018.



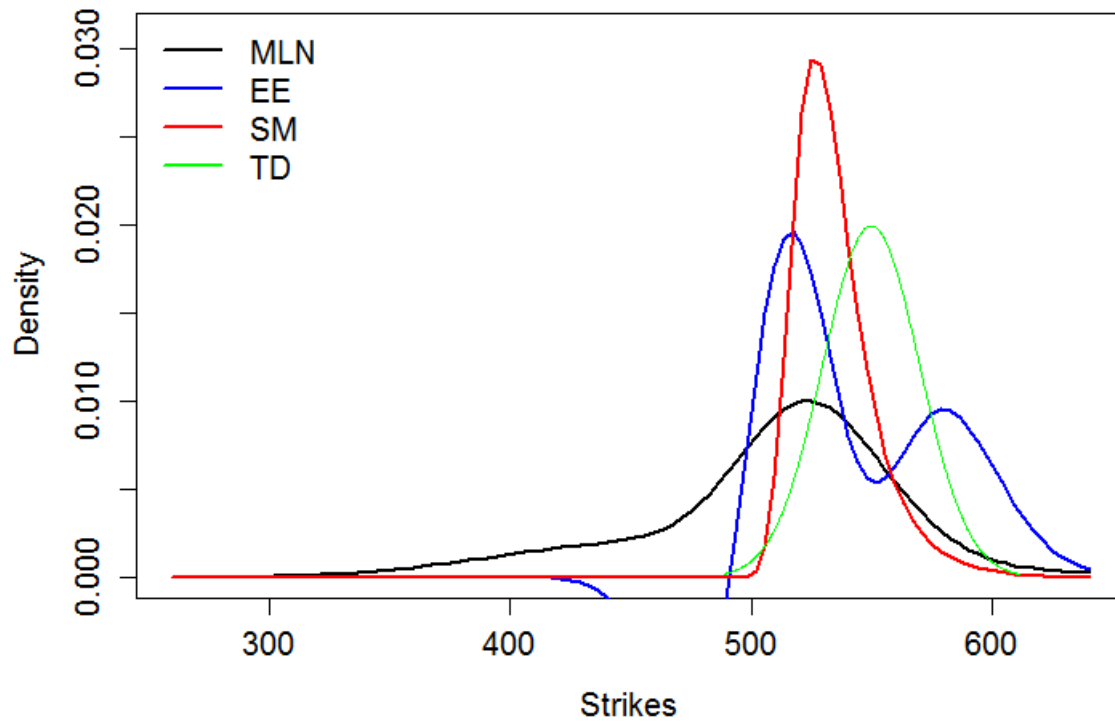
Slika 16: Rezultati usporedbe na datum dospijeca 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,20
mln.meanlog.1	6,28
mln.meanlog.2	6,33
mln.sdlog.1	0,04
mln.sdlog.2	0,01
ew.sigma	0,10
ew.skew	-0,99
ew.kurt	0,45
a0	-1,16
a1	0,01
a2	-0,00

Tablica 5: Procijenjeni parametri na datum dospijeća 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018.



Slika 17: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 23.03.2018.

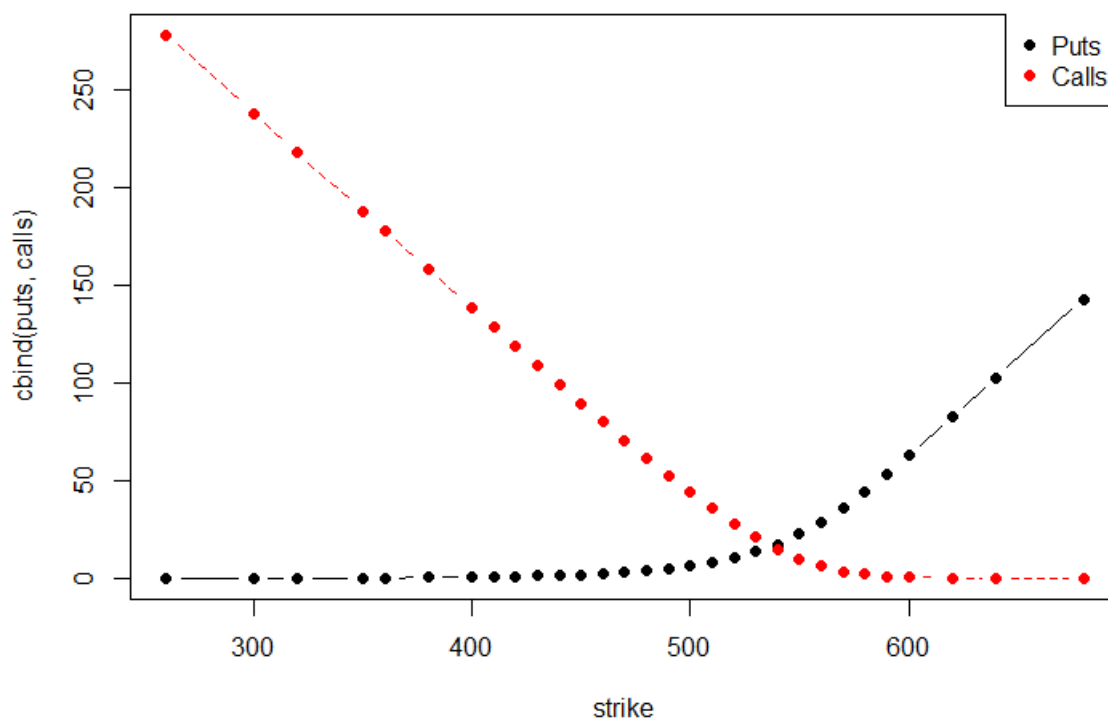


Slika 18: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018.

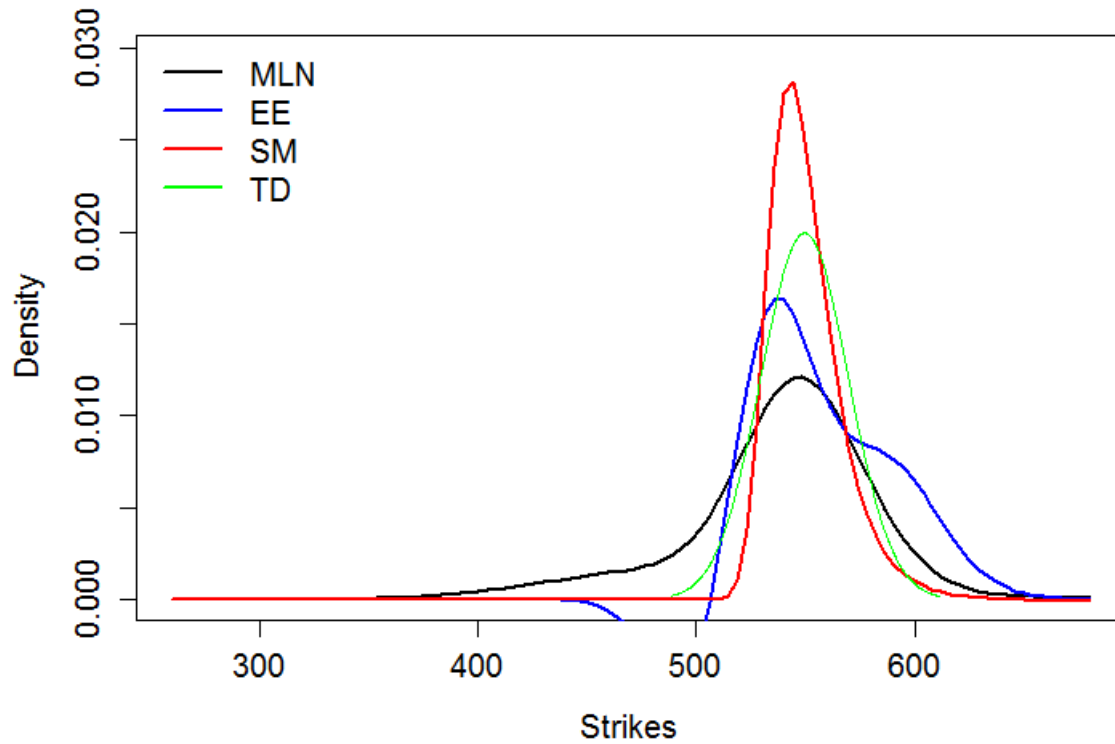


Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,36
mln.meanlog.1	6,16
mln.meanlog.2	6,26
mln.sdlog.1	0,15
mln.sdlog.2	0,05
ew.sigma	0,07
ew.skew	5,12
ew.kurt	0,00
a0	0,21
a1	-0,00
a2	0,00

Tablica 6: Procijenjeni parametri na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018.



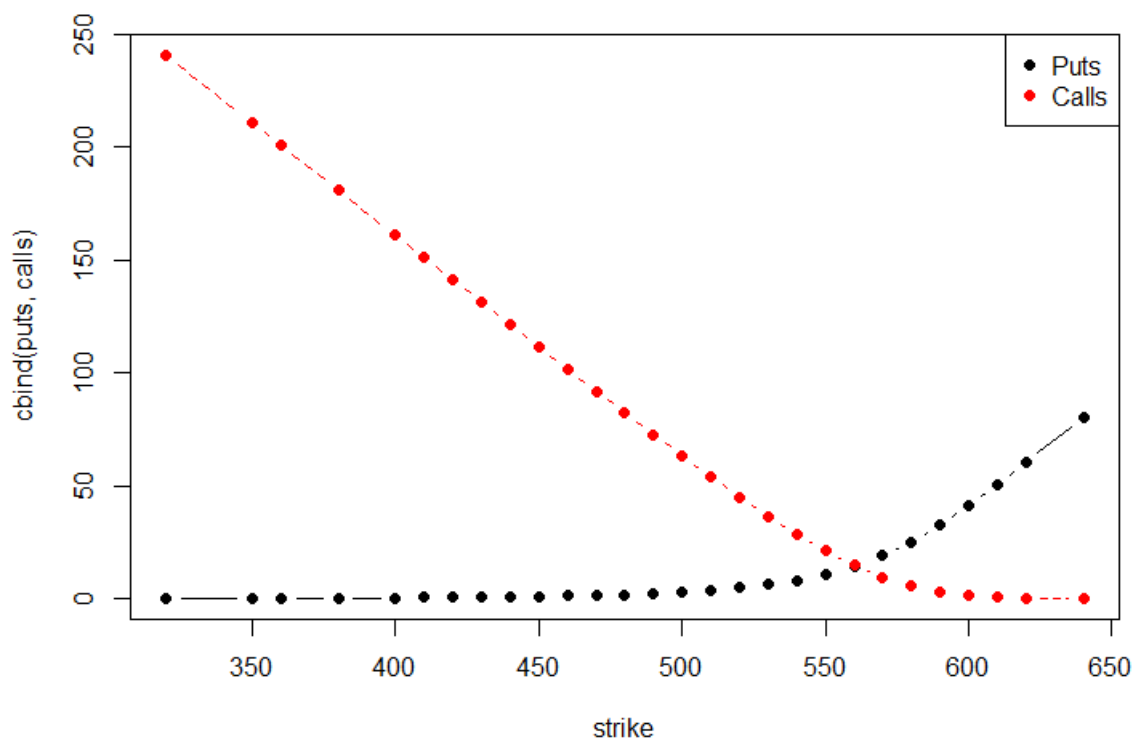
Slika 19: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 20.04.2018.



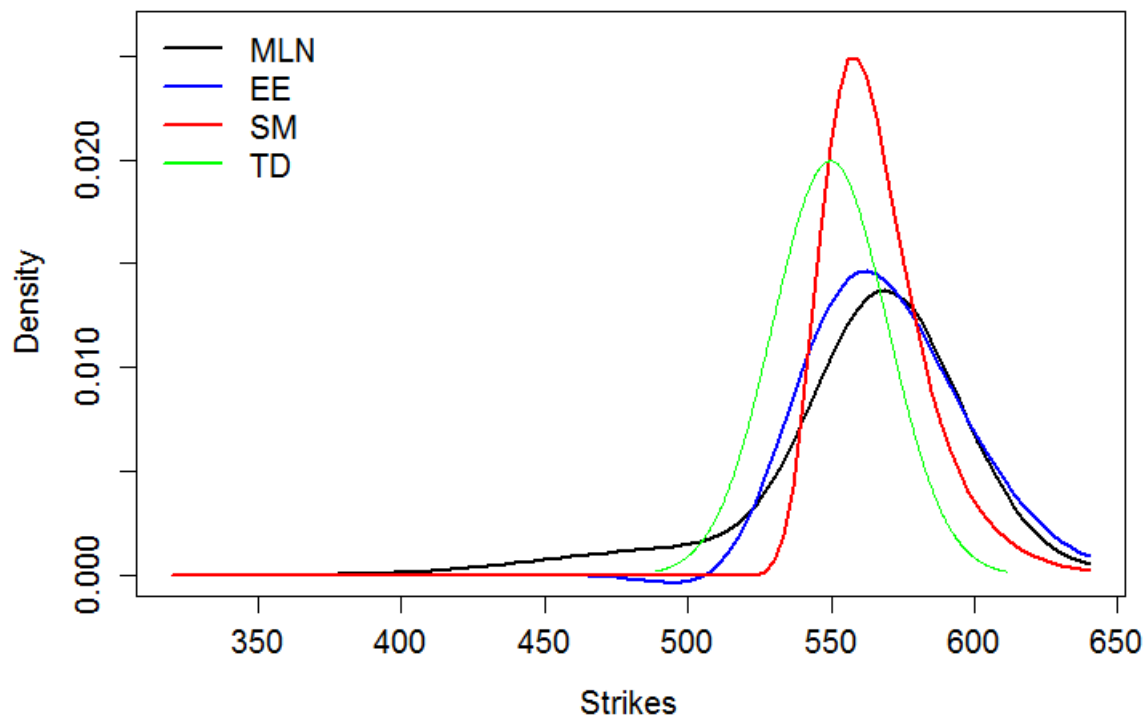
Slika 20: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 20.04.2018.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,25
mln.meanlog.1	6,21
mln.meanlog.2	6,31
mln.sdlog.1	0,12
mln.sdlog.2	0,05
ew.sigma	0,07
ew.skew	2,65
ew.kurt	0,00
a0	0,17
a1	-0,00
a2	0,00

Tablica 7: Procijenjeni parametri na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 20.04.2018.



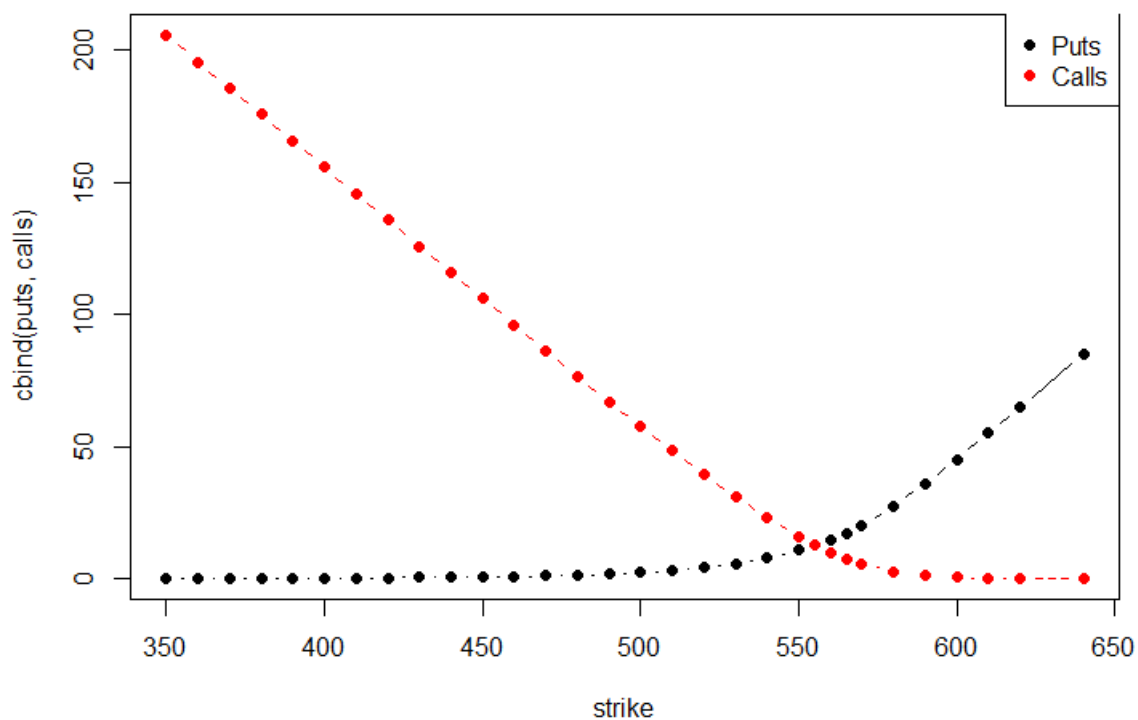
Slika 21: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 18.05.2018.



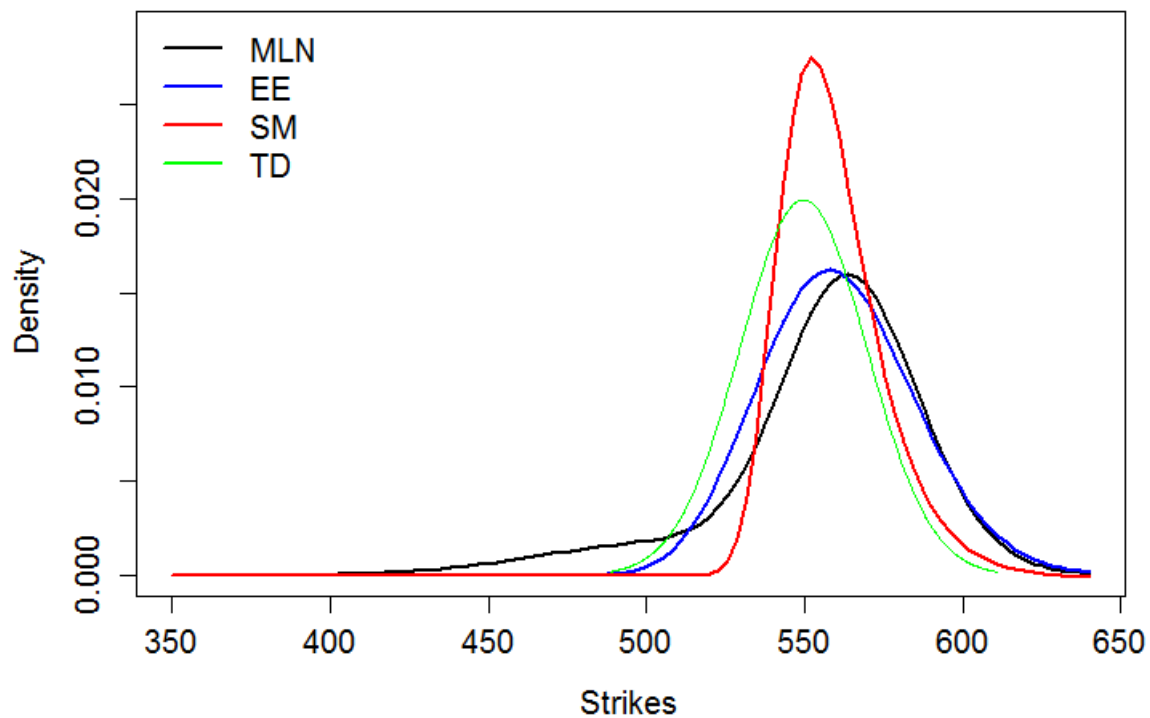
Slika 22: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,18
mln.meanlog.1	6,23
mln.meanlog.2	6,34
mln.sdlog.1	0,11
mln.sdlog.2	0,04
ew.sigma	0,08
ew.skew	0,61
ew.kurt	0,00
a0	0,22
a1	-0,00
a2	0,00

Tablica 8: Procijenjeni parametri na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018.



Slika 23: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018.

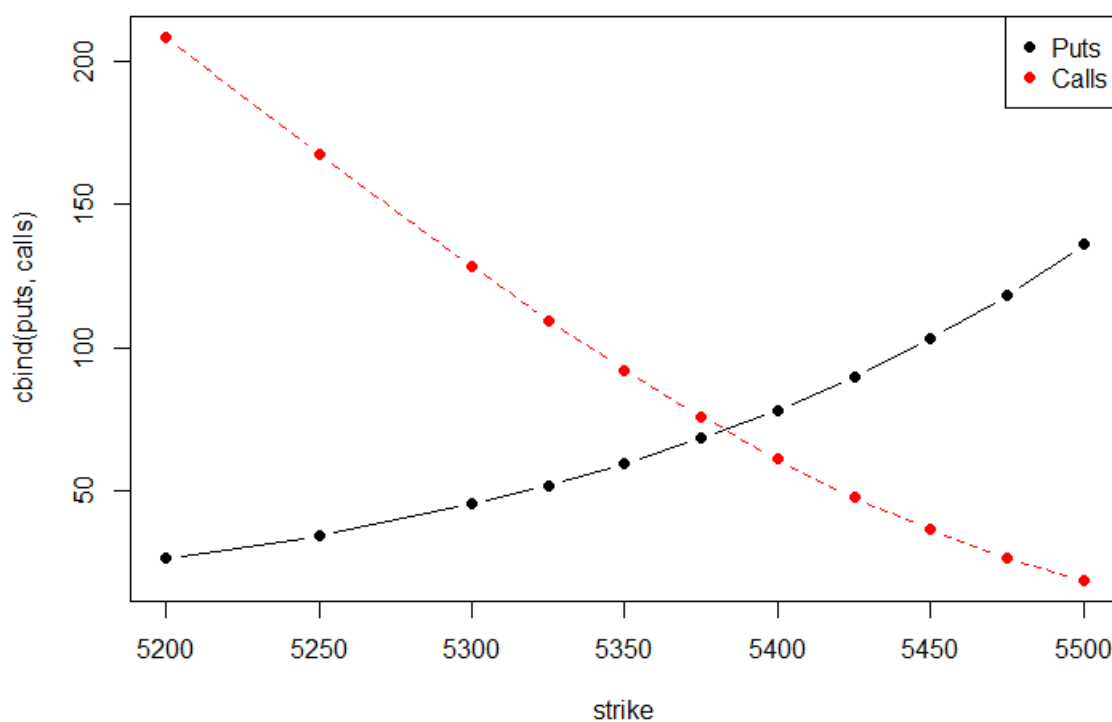


Slika 24: Rezultati usporedbe na datum dospijeca 21.09.2018. i datum opažanja 22.06.2018.

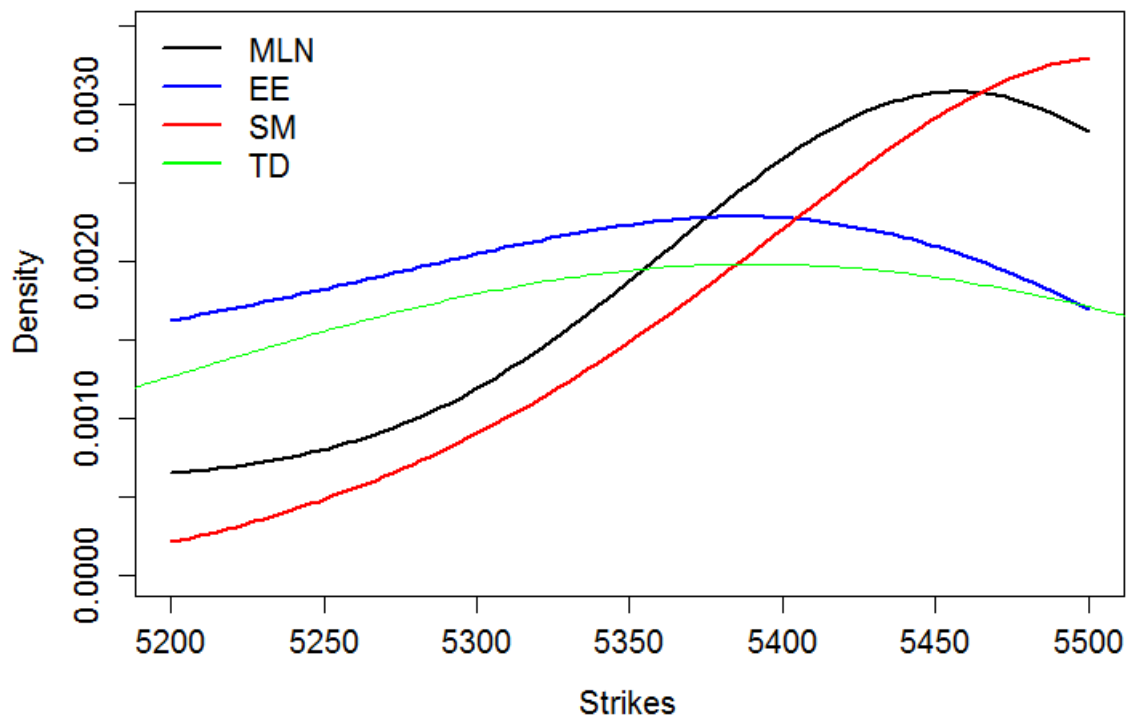
Slijede rezultati za CAC (Cotation Assistée en Continu) tržišni indeks.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,20
mln.meanlog.1	6,24
mln.meanlog.2	6,33
mln.sdlog.1	0,08
mln.sdlog.2	0,03
ew.sigma	0,09
ew.skew	0,22
ew.kurt	0,00
a0	0,17
a1	-0,00
a2	0,00

Tablica 9: Procijenjeni parametri na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 22.06.2018.



Slika 25: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018.

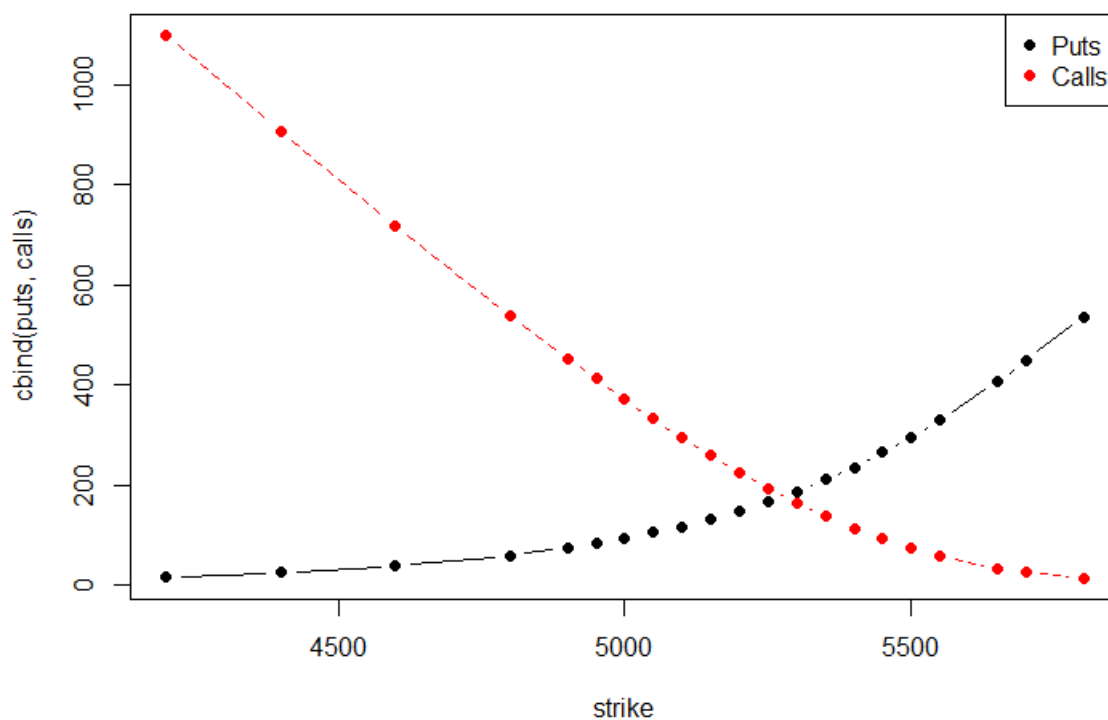


Slika 26: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018.

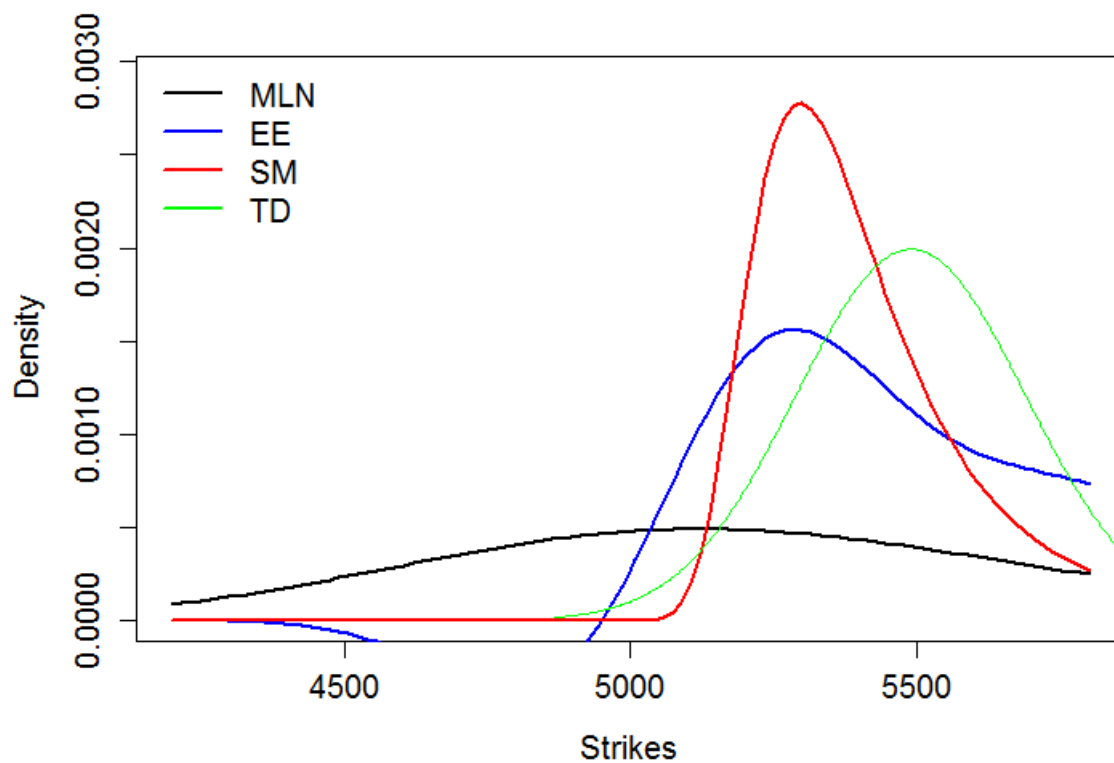


Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,71
mln.meanlog.1	8,61
mln.meanlog.2	0,02
mln.sdlog.1	0,04
mln.sdlog.2	0,11
ew.sigma	-1,42
ew.skew	0,00
ew.kurt	0,00
a0	-0,27
a1	0,00
a2	-0,00

Tablica 10: Procijenjeni parametri na datum dospelja 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018.



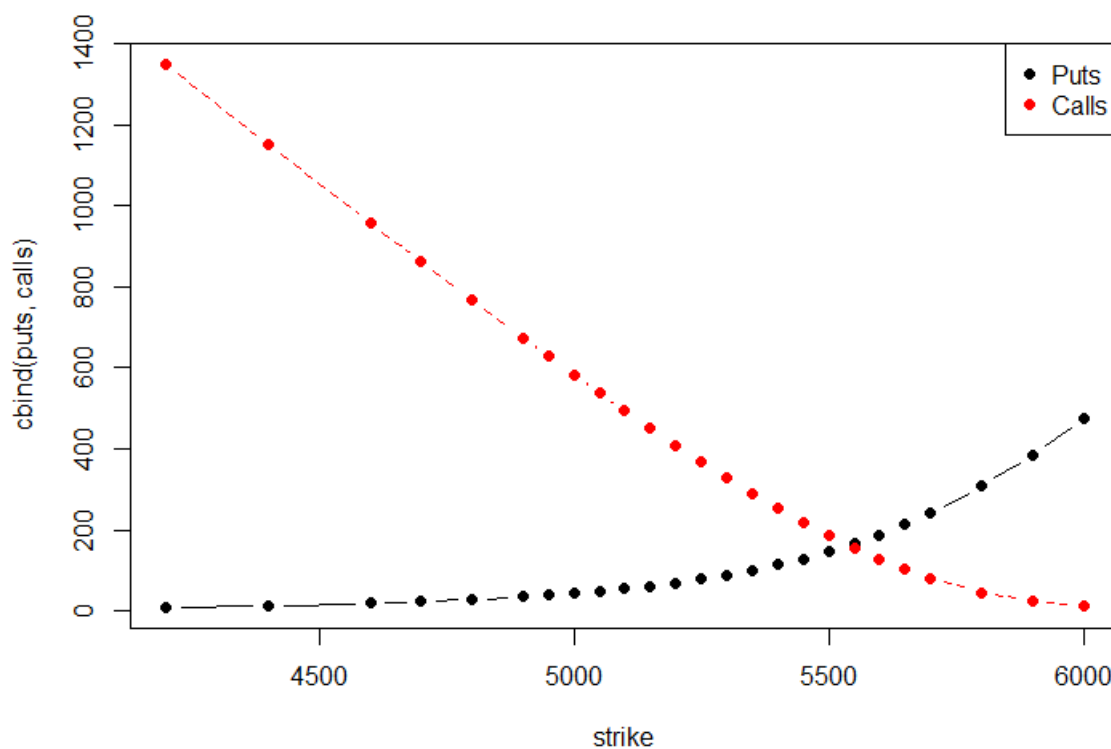
Slika 27: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 20.04.2018.



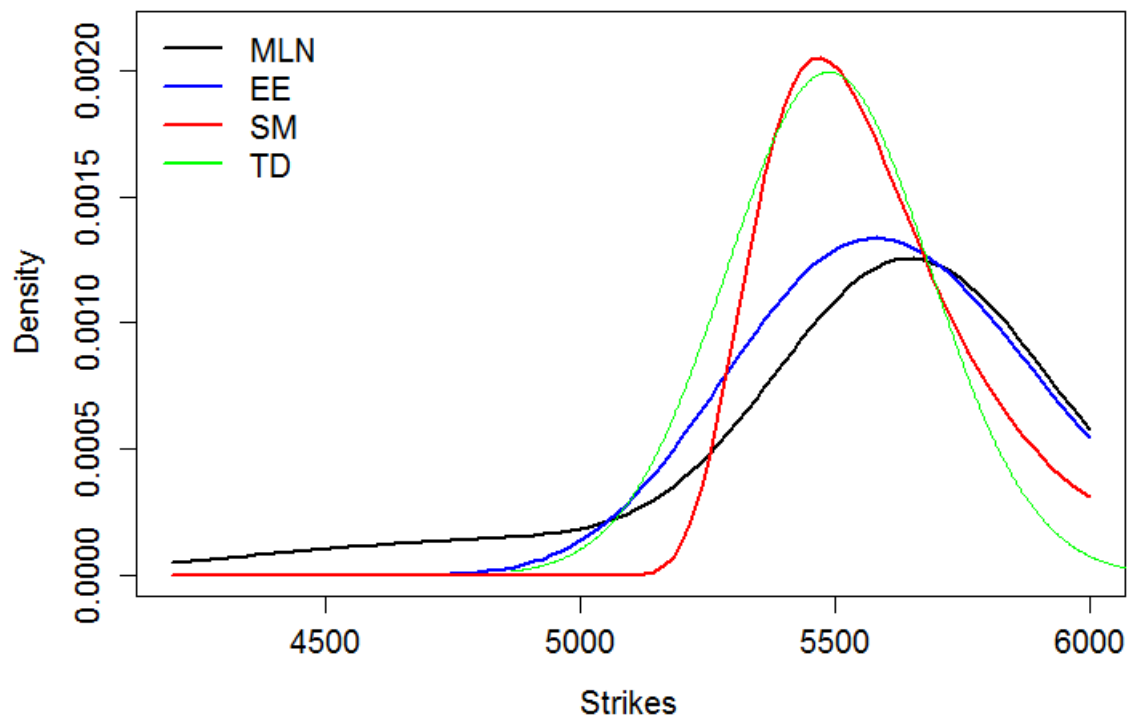
Slika 28: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 20.04.2018.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,67
mln.meanlog.1	8,55
mln.meanlog.2	8,60
mln.sdlog.1	0,10
mln.sdlog.2	0,00
ew.sigma	0,08
ew.skew	2,37
ew.kurt	0,00
a0	0,64
a1	-0,00
a2	0,00

Tablica 11: Procijenjeni parametri na datum dospelja 21.09.2018. i datum opažanja 20.04.2018.



Slika 29: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 18.05.2018.

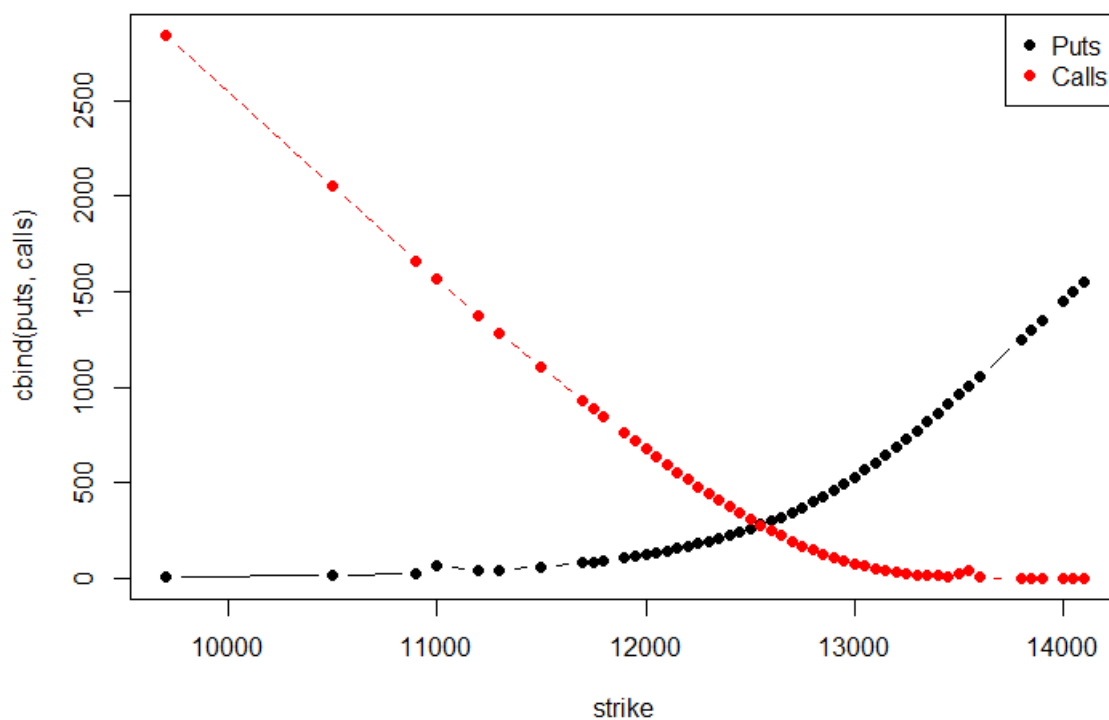


Slika 30: Rezultati usporedbe na datum dospijeca 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018.

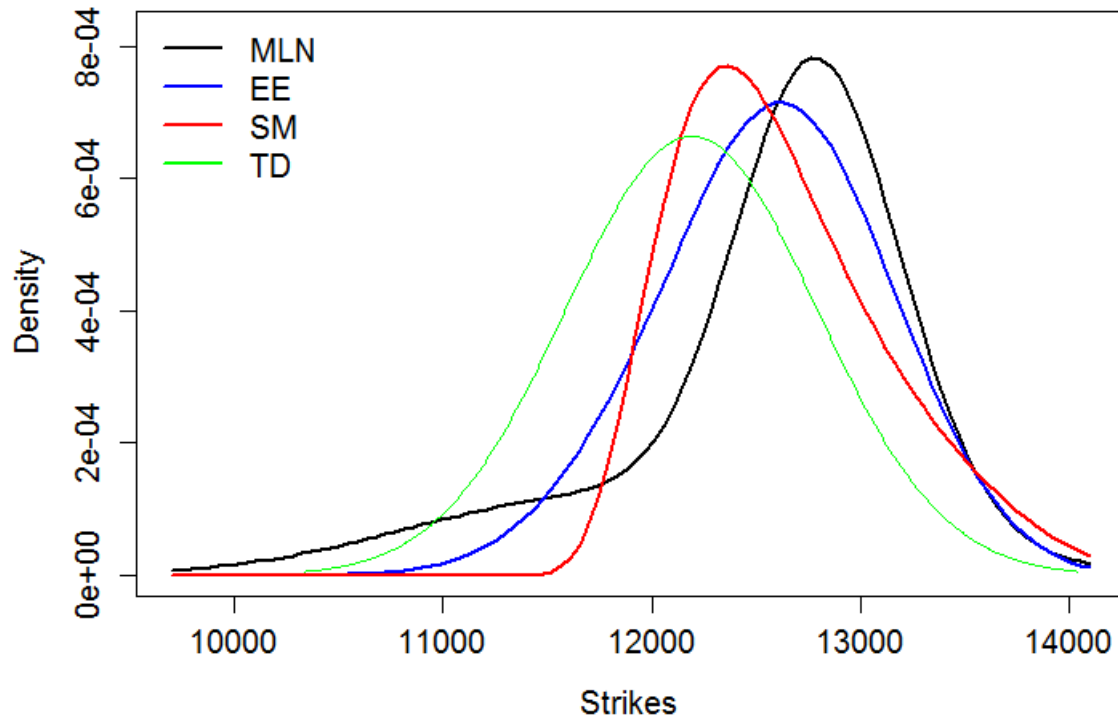
Slijede rezultati za DAX (Deutscher Aktienindex) tržišni indeks.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,19
mln.meanlog.1	8,51
mln.meanlog.2	8,64
mln.sdlog.1	0,10
mln.sdlog.2	0,04
ew.sigma	0,09
ew.skew	0,23
ew.kurt	0,00
a0	-0,08
a1	-0,00
a2	0,00

Tablica 12: Procijenjeni parametri na datum dospelja 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018.



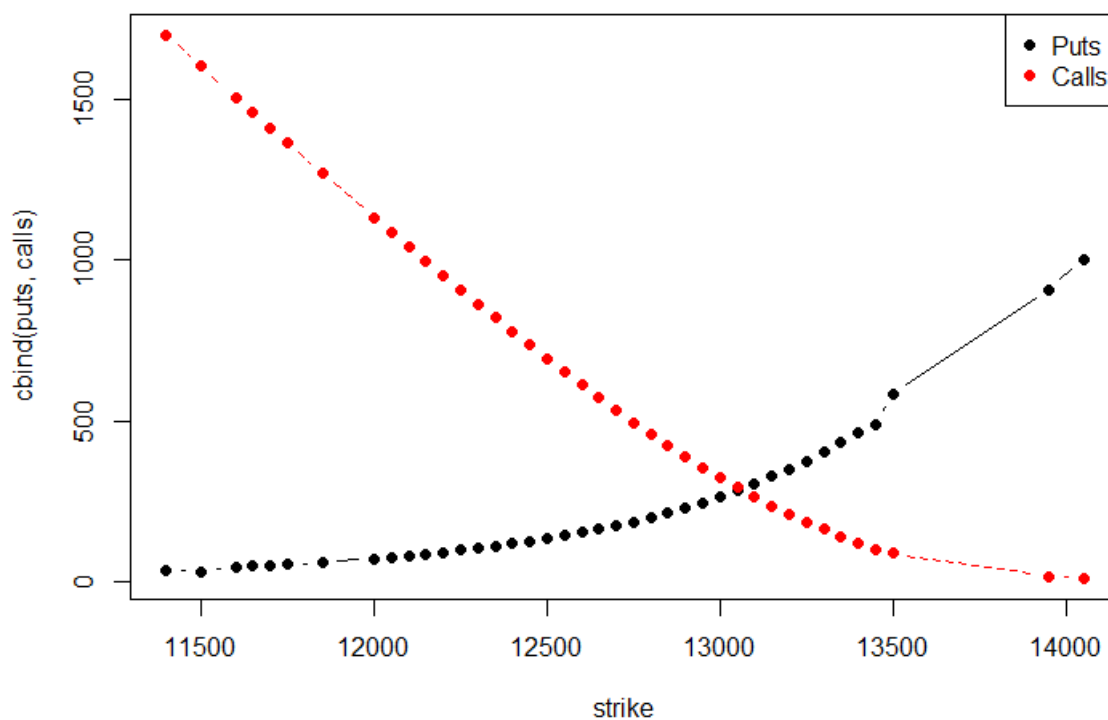
Slika 31: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018.



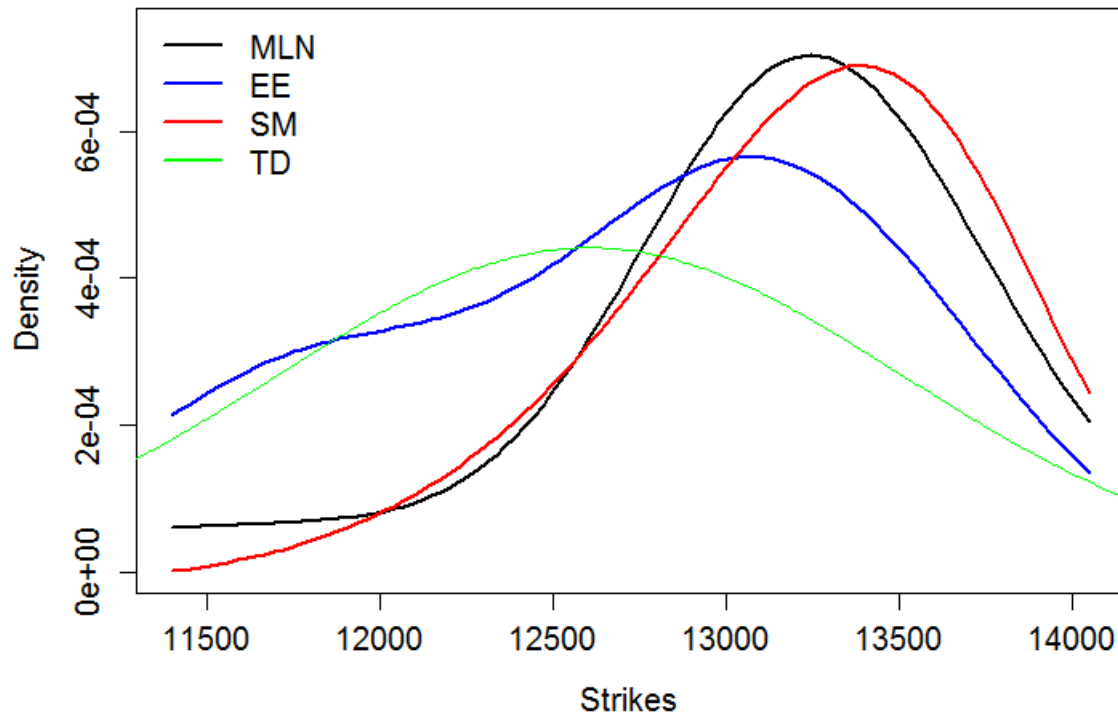
Slika 32: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 17.08.2018. i datum opažanja 22.06.2018.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,30
mln.meanlog.1	9,38
mln.meanlog.2	9,45
mln.sdlog.1	0,08
mln.sdlog.2	0,03
ew.sigma	0,11
ew.skew	-0,17
ew.kurt	0,00
a0	-2,19
a1	0,00
a2	-0,00

Tablica 13: Procijenjeni parametri na datum dospeljeća 17.08.2018. i datum opažanja 22.06.2018.



Slika 33: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 18.05.2018.

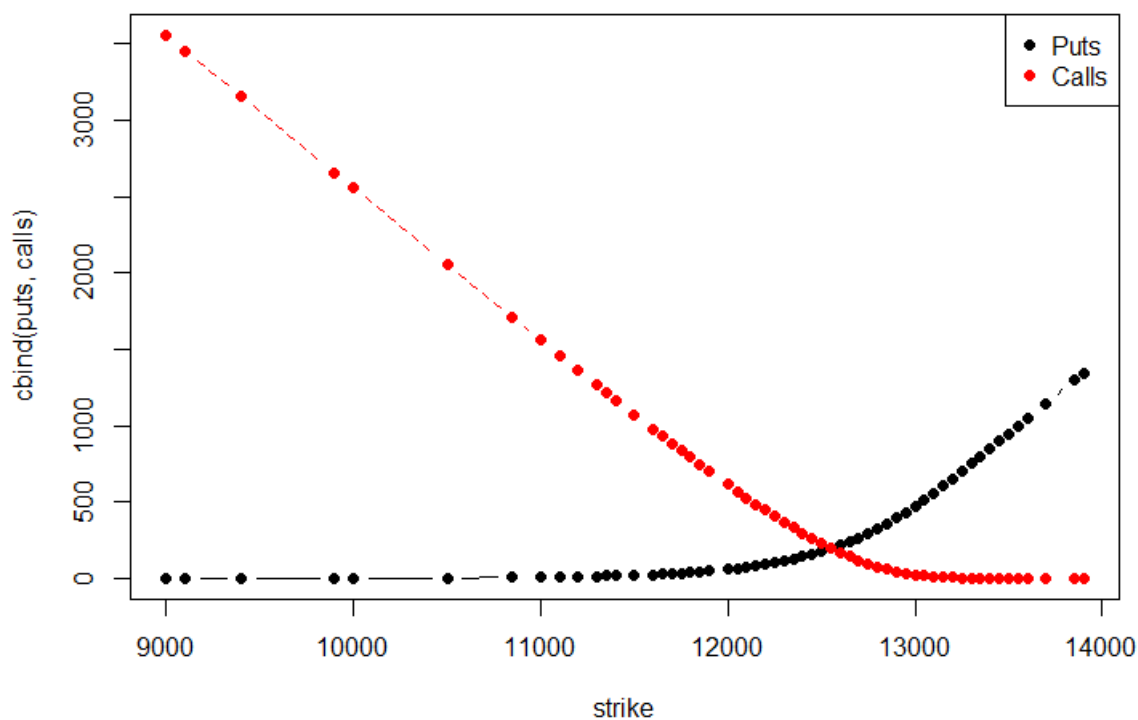


Slika 34: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 20.07.2018. i datum opažanja 18.05.2018.

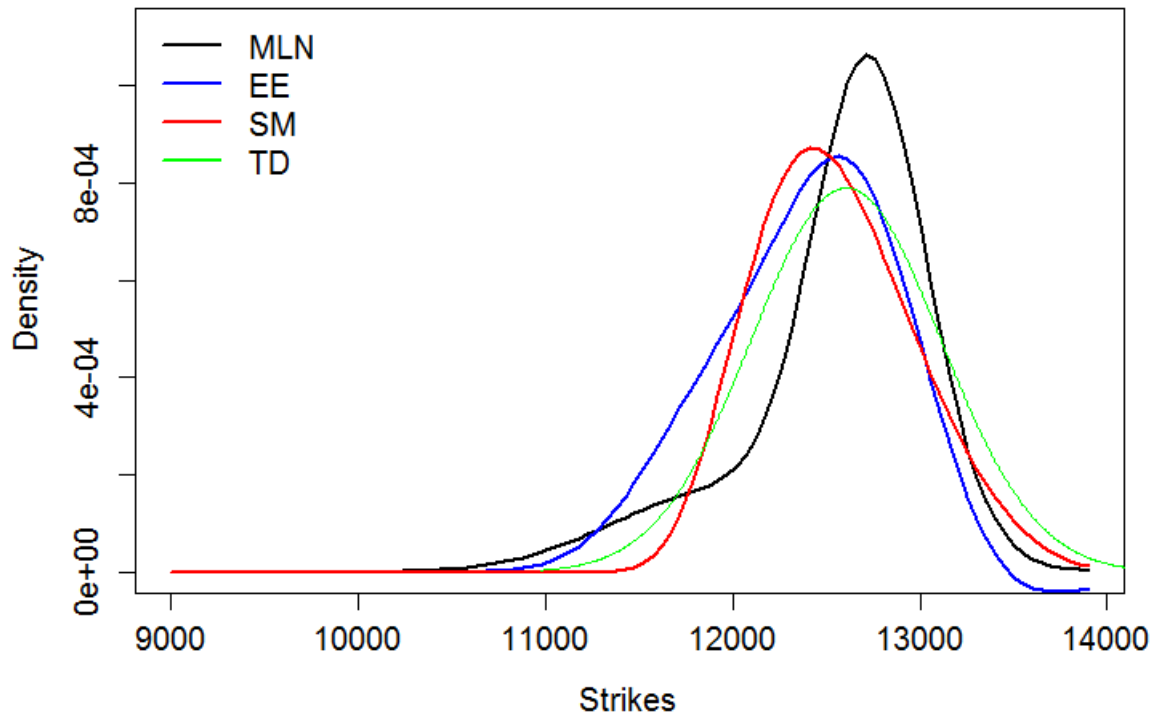


Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,83
mln.meanlog.1	9,49
mln.meanlog.2	9,38
mln.sdlog.1	0,03
mln.sdlog.2	0,08
ew.sigma	0,13
ew.skew	-1,23
ew.kurt	1,06
a0	1,55
a1	-0,00
a2	0,00

Tablica 14: Procijenjeni parametri na datum dospelja 20.07.2018. i datum opažanja 18.05.2018.



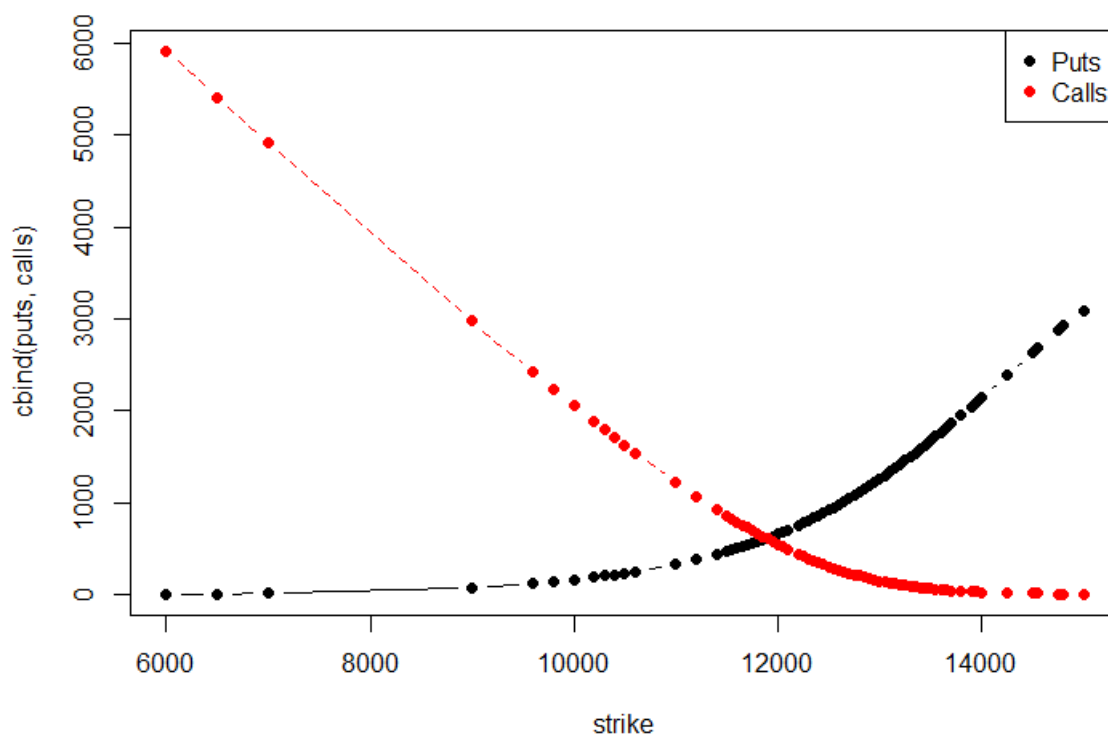
Slika 35: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018.



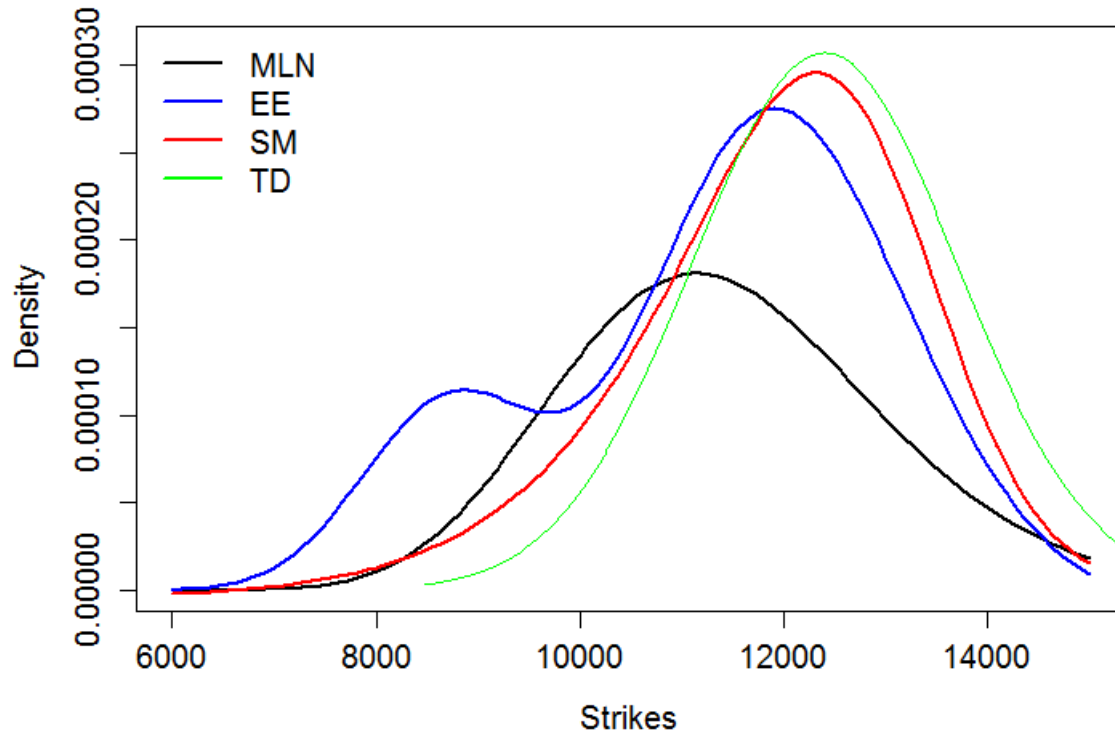
Slika 36: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,26
mln.meanlog.1	9,39
mln.meanlog.2	9,45
mln.sdlog.1	0,05
mln.sdlog.2	0,02
ew.sigma	0,13
ew.skew	-0,91
ew.kurt	0,00
a0	-1,69
a1	0,00
a2	-0,00

Tablica 15: Procijenjeni parametri na datum dospelja 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018.



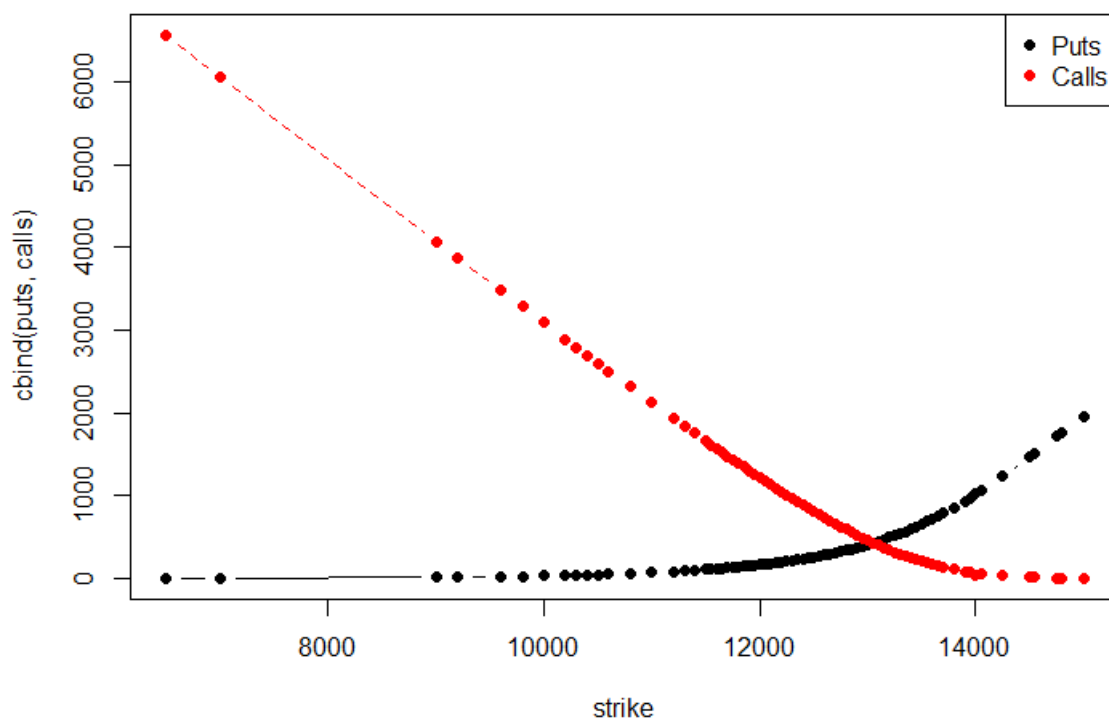
Slika 37: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 23.03.2018.



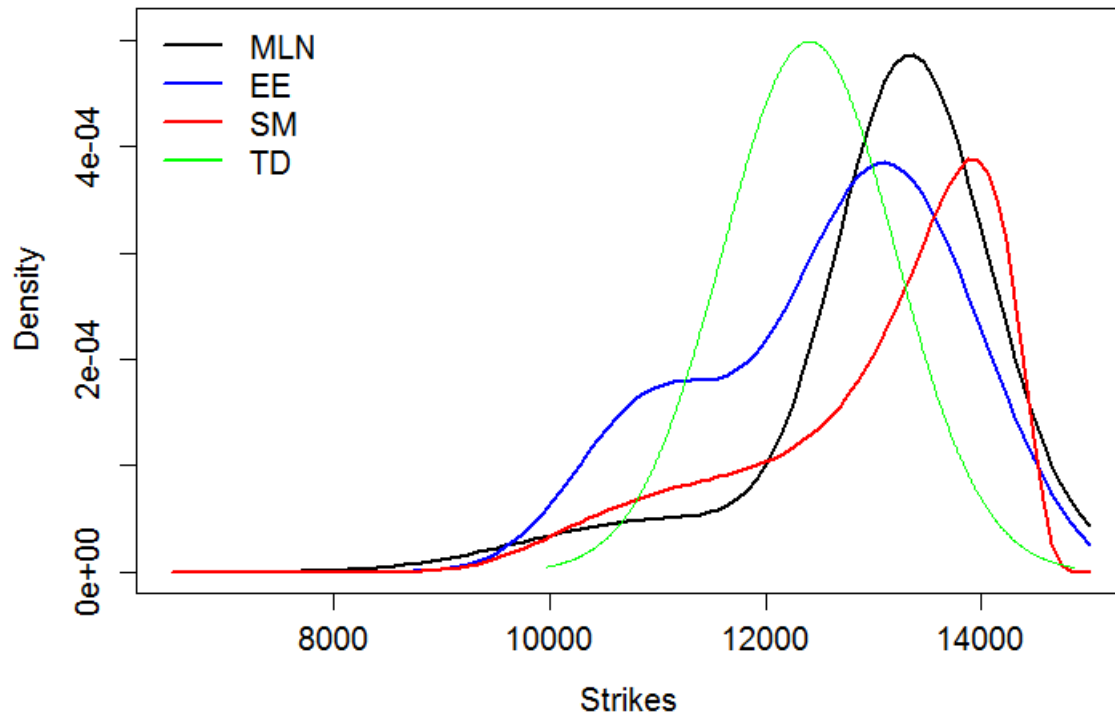
Slika 38: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,71
mln.meanlog.1	9,33
mln.meanlog.2	9,46
mln.sdlog.1	0,13
mln.sdlog.2	0,00
ew.sigma	0,19
ew.skew	-1,17
ew.kurt	0,00
a0	1,13
a1	-0,00
a2	0,00

Tablica 16: Procijenjeni parametri na datum dospelja 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018.



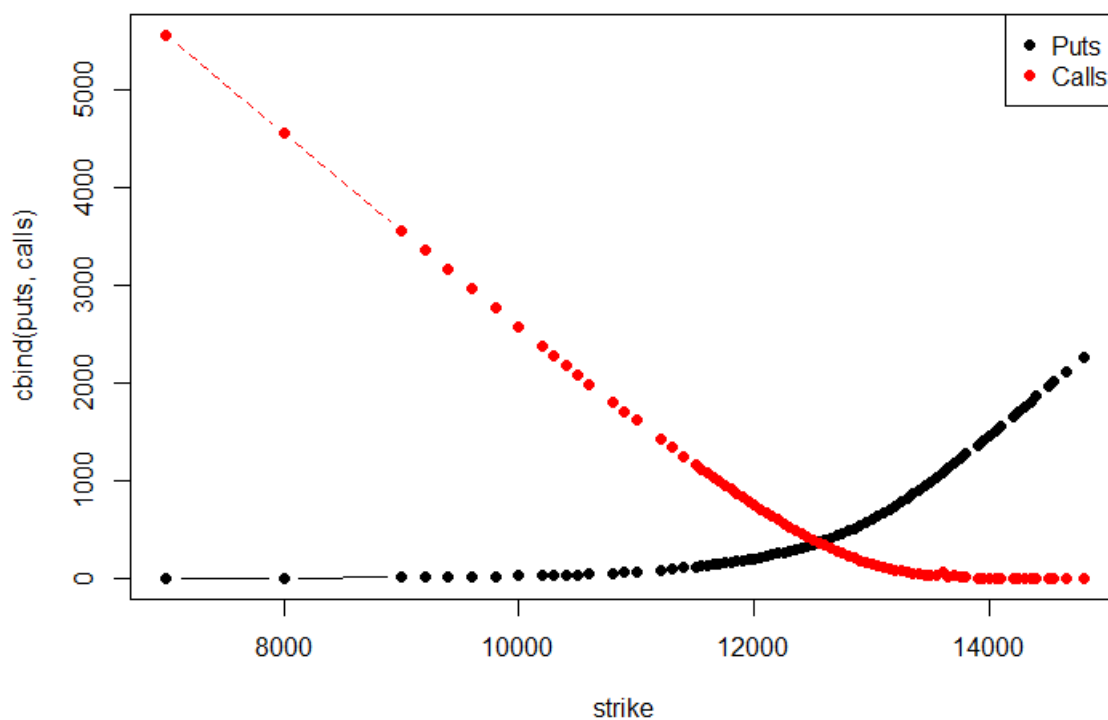
Slika 39: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 18.05.2018.



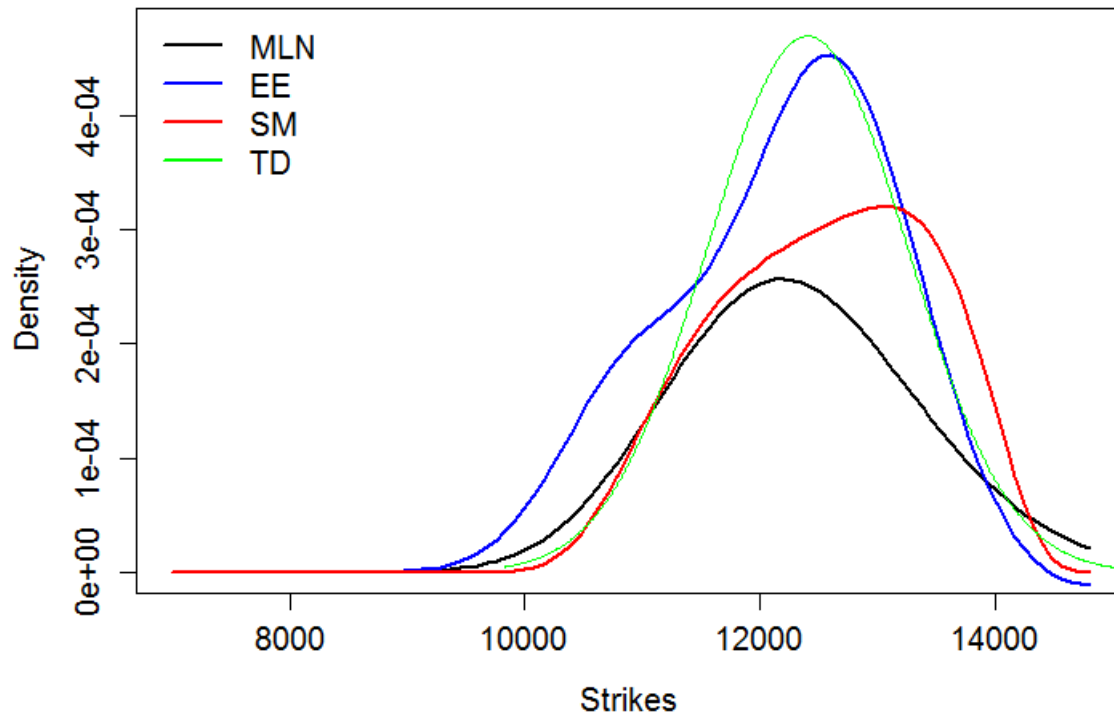
Slika 40: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,18
mln.meanlog.1	9,33
mln.meanlog.2	9,50
mln.sdlog.1	0,13
mln.sdlog.2	0,05
ew.sigma	0,14
ew.skew	-1,24
ew.kurt	0,74
a0	-0,79
a1	0,00
a2	-0,00

Tablica 17: Procijenjeni parametri na datum dospelja 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018.



Slika 41: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018.



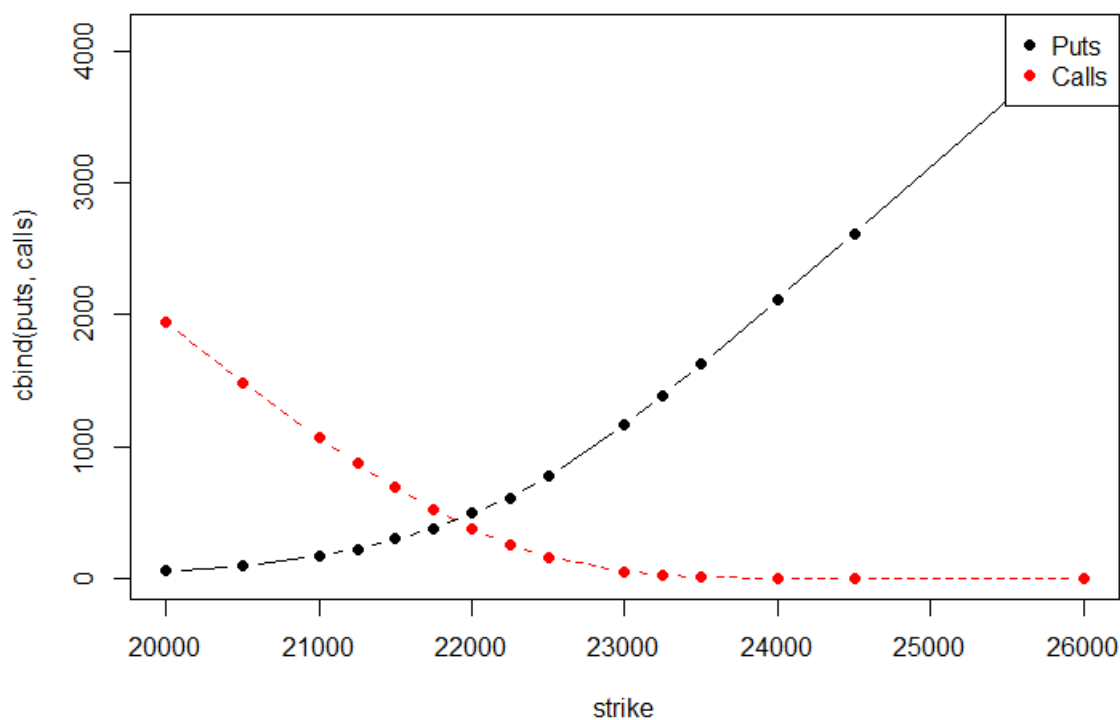
Slika 42: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 22.06.2018.

Slijede rezultati za MIB (Milano Indice di Borsa) tržišni indeks.

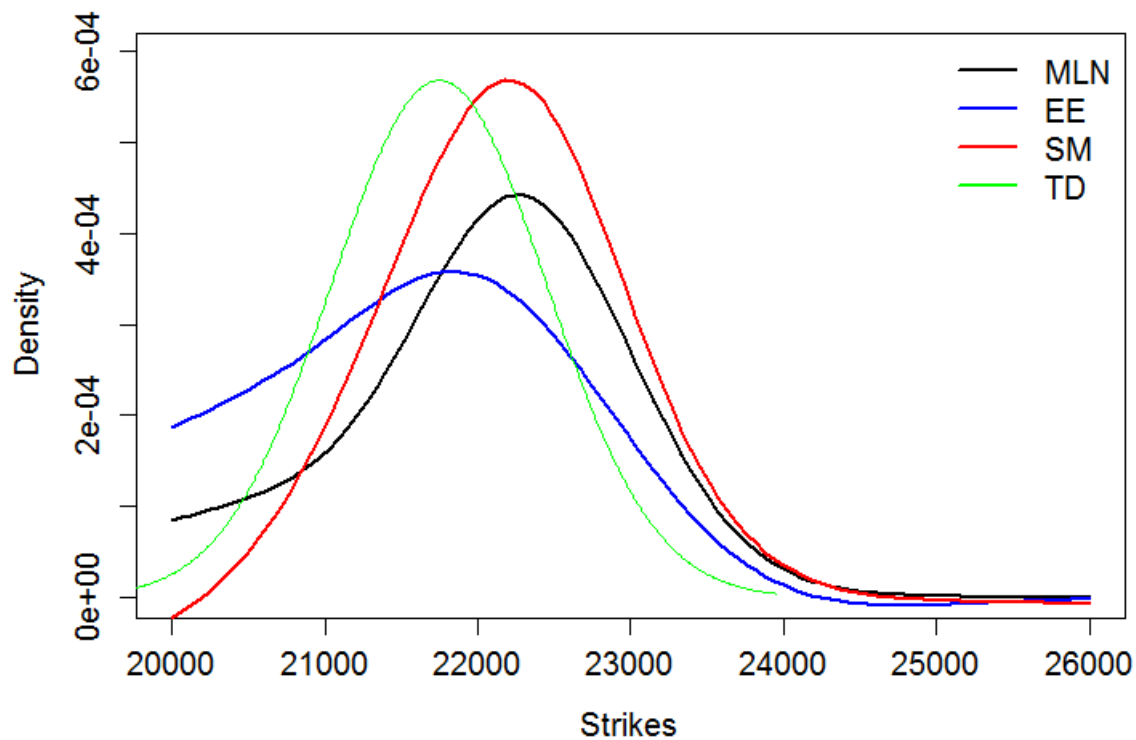


Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,68
mln.meanlog.1	9,41
mln.meanlog.2	9,47
mln.sdlog.1	0,08
mln.sdlog.2	0,00
ew.sigma	0,14
ew.skew	-1,05
ew.kurt	0,44
a0	-1,22
a1	0,00
a2	-0,00

Tablica 18: Procijenjeni parametri na datum dospeljeća 21.09.2018. i datum opažanja 22.06.2018.



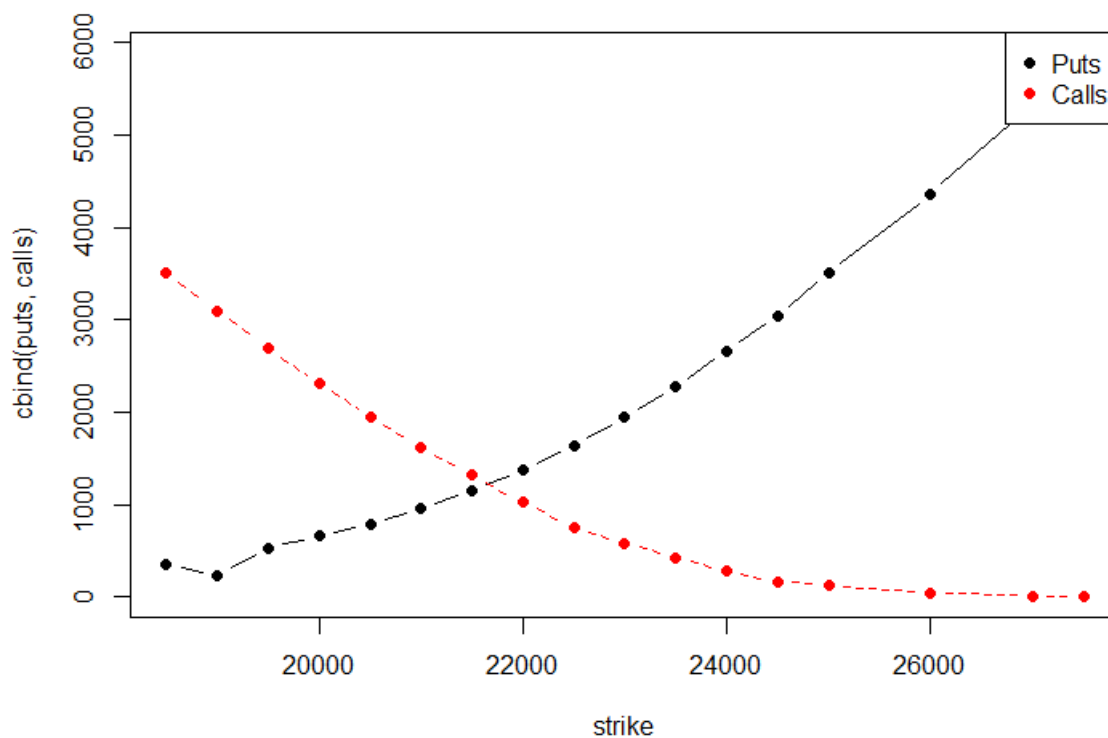
Slika 43: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018.



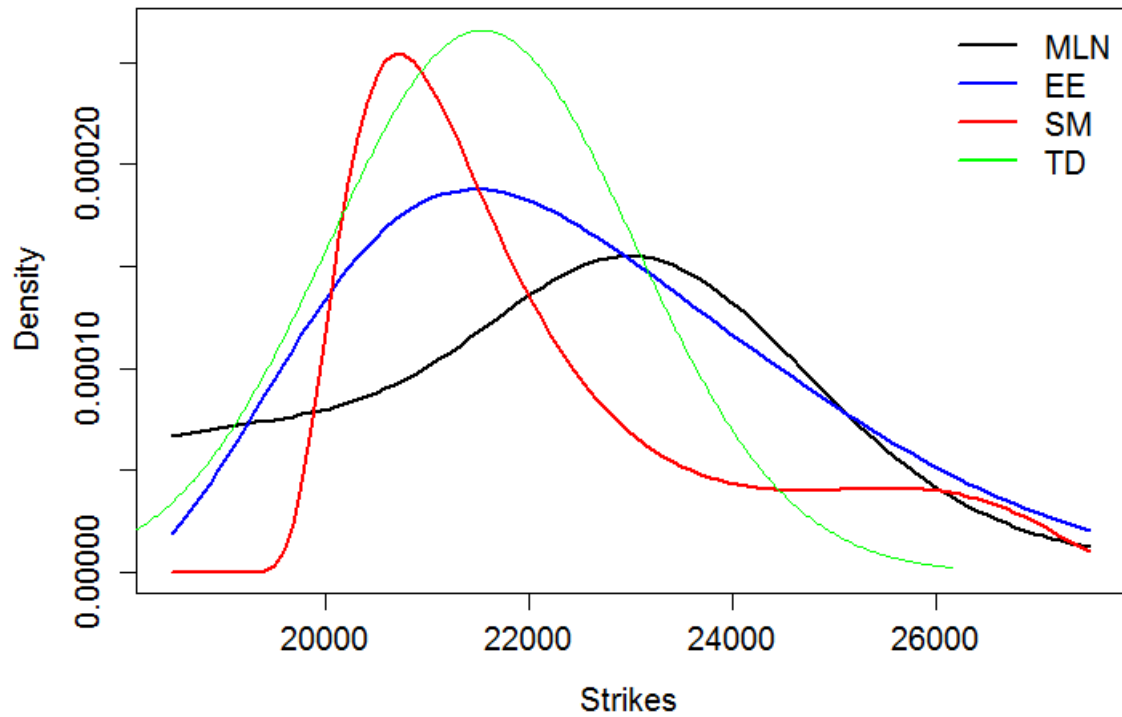
Slika 44: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,68
mln.meanlog.1	10,01
mln.meanlog.2	9,94
mln.sdlog.1	0,03
mln.sdlog.2	0,05
ew.sigma	0,18
ew.skew	-0,97
ew.kurt	0,53
a0	5,31
a1	-0,00
a2	0,00

Tablica 19: Procijenjeni parametri na datum dospeljeća 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018.



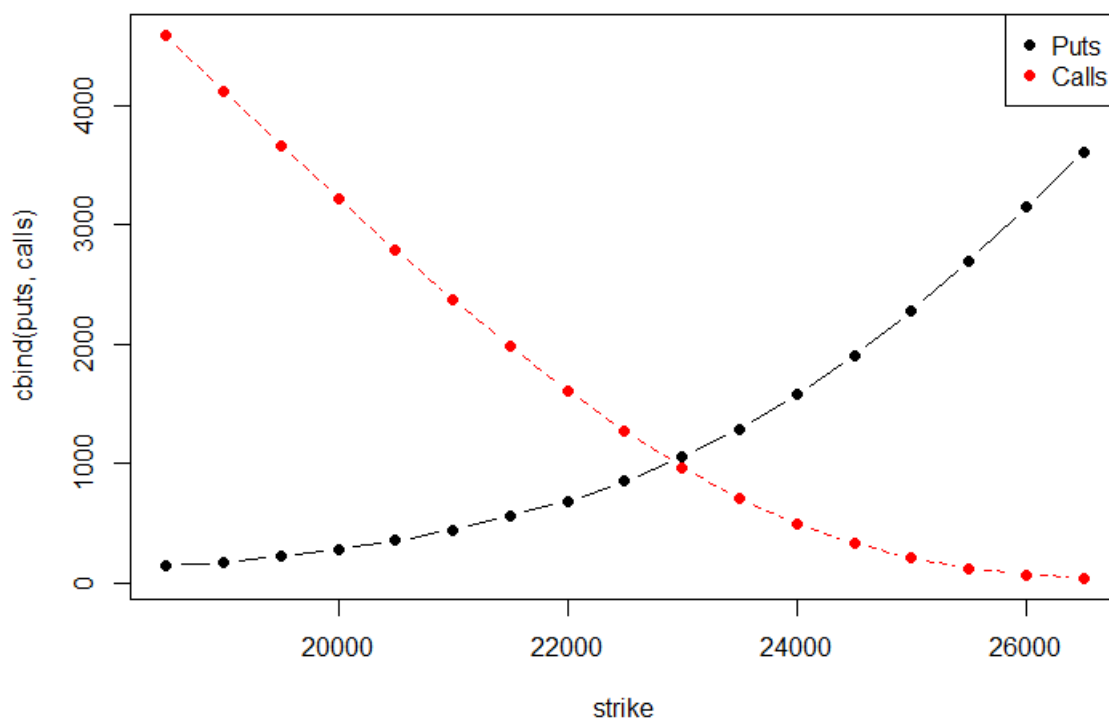
Slika 45: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 23.03.2018.



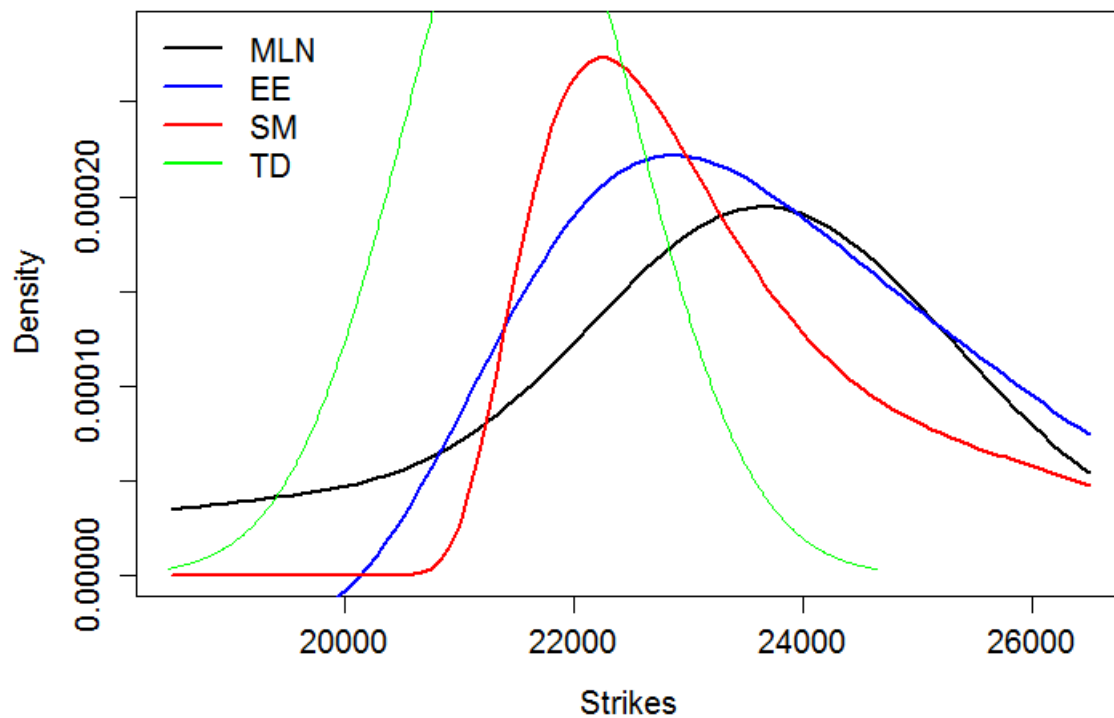
Slika 46: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018.

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,42
mln.meanlog.1	10,05
mln.meanlog.2	9,91
mln.sdlog.1	0,06
mln.sdlog.2	0,15
ew.sigma	0,14
ew.skew	1,10
ew.kurt	0,00
a0	-2,55
a1	0,00
a2	-0,00

Tablica 20: Procijenjeni parametri na datum dospelja 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018.



Slika 47: Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 18.05.2018.



Slika 48: Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018.

---

Parametri	Vrijednosti
mln.alpha.1	0,67
mln.meanlog.1	10,08
mln.meanlog.2	9,93
mln.sdlog.1	0,06
mln.sdlog.2	0,15
ew.sigma	0,13
ew.skew	1,26
ew.kurt	0,00
a0	-2,25
a1	0,00
a2	-0,00

Tablica 21: Procijenjeni parametri na datum dospijeca 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018.

### 6.3 Rezultati usporedbe

U ovom poglavlju ćemo dati rezultate usporedbi Kolmogorov - Smirnov testa (KS) i Diebold - Mariano testa (DM). Rezultati će biti prikazani za sve promatrane tržišne indekse i kombinacije datuma opažanja te datuma dospijeaća.

Indeks, datum dospijeaća, datum opažanja	TD - MLN		TD - EE		TD - SM	
	KS	pv	KS	pv	KS	pv
AEX 17.08.2018. 22.06.2018.	0,26	<0,05	0,54	<0,05	0,67	<0,05
AEX 20.07.2018. 22.06.2018.	0,41	<0,05	0,52	<0,05	0,59	<0,05
AEX 21.09.2018. 23.03.2018.	0,38	<0,05	0,61	<0,05	0,72	<0,05
AEX 21.09.2018. 20.04.2018.	0,42	<0,05	0,65	<0,05	0,75	<0,05
AEX 21.09.2018. 18.05.2018.	0,37	<0,05	0,59	<0,05	0,65	<0,05
AEX 21.09.2018. 22.06.2018.	0,36	<0,05	0,51	<0,05	0,66	<0,05
CAC 20.07.2018. 22.06.2018.	0,53	<0,05	0,80	<0,05	0,38	<0,05
CAC 21.09.2018. 20.04.2018.	0,54	<0,05	0,47	<0,05	0,54	<0,05
CAC 21.09.2018. 18.05.2018.	0,31	<0,05	0,35	<0,05	0,53	<0,05
DAX 17.08.2018. 22.06.2018.	0,35	<0,05	0,47	<0,05	0,53	<0,05
DAX 20.07.2018. 18.05.2018.	0,37	<0,05	0,55	<0,05	0,38	<0,05
DAX 20.07.2018. 22.06.2018.	0,31	<0,05	0,46	<0,05	0,49	<0,05
DAX 21.09.2018. 23.03.2018.	0,34	<0,05	0,15	<0,05	0,13	>0,05
DAX 21.09.2018. 18.05.2018.	0,30	<0,05	0,31	<0,05	0,35	<0,05
DAX 21.09.2018. 22.06.2018.	0,36	<0,05	0,35	<0,05	0,43	<0,05
MIB 20.07.2018. 22.06.2018.	0,22	<0,05	0,31	<0,05	0,29	<0,05
MIB 21.09.2018. 23.03.2018.	0,34	<0,05	0,27	<0,05	0,20	<0,05
MIB 21.09.2018. 18.05.2018.	0,38	<0,05	0,35	<0,05	0,28	<0,05

Tablica 22: Rezultati KS testa

Prethodna tablica daje združene rezultate KS testa za sve promatrane indekse i kombinacije datuma dospijeaća i datuma opažanja. U tablici KS označava vrijednost test statistike, a oznaka pv, pripadnu p-vrijednost testa. Vidljivo je iz tablice da u svim slučajevima odbacujemo nultu hipotezu da procijenjene vrijednosti gustoća vjerojatnosti dolaze iz iste distribucije. Kod primjera burzovnog indeksa AEX na datum dospijeaća 17.08.2018. i datum opažanja 22.06.2018. odbacujemo nultu hipotezu na nivou značajnosti 5%.



Indeks, datum dospijeća, datum opažanja	MLN - EE		MLN - SM		EE - SM	
	DM	pv	DM	pv	DM	pv
AEX 17.08.2018. 22.06.2018.	-8,85	<0,05	-7,51	<0,05	-6,85	<0,05
AEX 20.07.2018. 22.06.2018.	2,23	<0,05	0,85	>0,05	-2,21	<0,05
AEX 21.09.2018. 23.03.2018.	-6,75	<0,05	-7,81	<0,05	-1,32	>0,05
AEX 21.09.2018. 20.04.2018.	-5,74	<0,05	-7,34	<0,05	-4,24	<0,05
AEX 21.09.2018. 18.05.2018.	-7,24	<0,05	-8,21	<0,05	-6,99	<0,05
AEX 21.09.2018. 22.06.2018.	-5,41	<0,05	-7,96	<0,05	-7,38	<0,05
CAC 20.07.2018. 22.06.2018.	-4,06	<0,05	-7,55	<0,05	-0,87	>0,05
CAC 21.09.2018. 20.04.2018.	-7,04	<0,05	-8,62	<0,05	-5,41	<0,05
CAC 21.09.2018. 18.05.2018.	-7,99	<0,05	-9,82	<0,05	-8,58	<0,05
DAX 17.08.2018. 22.06.2018.	-18,06	<0,05	-10,94	<0,05	-7,00	<0,05
DAX 20.07.2018. 18.05.2018.	-5,85	<0,05	-1,45	>0,05	-5,68	<0,05
DAX 20.07.2018. 22.06.2018.	1,94	>0,05	1,34	>0,05	-0,76	>0,05
DAX 21.09.2018. 23.03.2018.	0,34	>0,05	-5,18	<0,05	-7,70	<0,05
DAX 21.09.2018. 18.05.2018.	6,45	<0,05	3,10	<0,05	-2,64	<0,05
DAX 21.09.2018. 22.06.2018.	-4,35	<0,05	-3,02	<0,05	3,19	<0,05
MIB 20.07.2018. 22.06.2018.	1,35	>0,05	-9,73	<0,05	-6,34	<0,05
MIB 21.09.2018. 23.03.2018.	-2,50	<0,05	-6,54	<0,05	-6,91	<0,05
MIB 21.09.2018. 18.05.2018.	-6,56	<0,05	-7,84	<0,05	-3,65	<0,05

Tablica 23: Rezultati DM testa

Prethodna tablica daje združene rezultate DM testa za sve promatrane indekse i kombinacije datuma dospijeća i datuma opažanja. U tablici DM označava vrijednost test statistike, a oznaka pv, pripadnu p-vrijednost testa. Ovim testom smo testirali nultu hipotezu da promatrani modeli imaju istu prognostičku preciznost. Kod primjera burzovnog indeksa AEX na datum dospijeća 17.08.2018. i datum opažanja 22.06.2018. odbacujemo nultu hipotezu na nivou značajnosti 5%.

## 6.4 Ograničenja istraživanja i buduće smjernice

Ograničenja u istraživanju ovog poslijediplomskog specijalističkog rada su bila ponajviše vezana uz manjak podataka i dodavanju šuma odnosno stohastičke pojave prilikom korištenja visokofrekventnih podataka. U pravilu, veća frekvencija intradnevni podataka dodaje više informacija, ali isto tako dodaje mikrostrukturni šum zbog razlike između ponude i potražnje. Uglavnom se upotrebljavaju kao početna točka za konstrukciju složenih procesa, ali isto tako unose stohastičku odnosno slučajnu komponentu kod promatranja financijskih serija (Bauwens et. al., 2008). Prisutnost mikrostrukturnih šumova utječe najčešće na pristranost rezultata. Takvi se šumovi mogu izbjeći ne tako čestim uzorkovanjem visokih frekvencija, čime se istovremeno gubi na podacima. Što je manje podataka varijanca procjenitelja će biti veća, odnosno procjenitelj postaje postaje manje pristran ili nepristran, ali neefikasan. U dosadašnjoj literaturi su kontinuirano prisutne dileme oko pristranosti i efikasnosti. Iste te dileme su prisutne i kod izbora širine Kernelovog pojasa. Što je širina pojasa manja procjena funkcije gustoće vjerojatnosti je više pristrana ali manje efikasna, i obratno. U ovom poslijediplomskom specijalističkom radu kod nekih primjera širina Kernelovog pojasa je bila viša od preporučenog. Taj parametar je podešavan kako bi se dobila najbolja prilagodba visokofrekventnim podacima te tada nije potrebno dodatno izgladivanje distribucije. Što se tiče manjka podataka, iako se ne radi o financijskim tržištima u nastajanju, za neke kombinacije datume opažanja i datuma dospjeća nije bilo dovoljno podataka za daljnju analizu. Manjak podataka se najviše odnosio na dostupnost i pojavu cijena opcija na kupnju i prodaju za promatrane tržišne indekse. Unatoč tome što smo imali dostupne visokofrekventne podatke za promatrane tržišne indekse na datum dospjeća 12.12.2018., nije bilo dovoljno podataka za niti jedan naveden datum opažanja tj. nije bilo dovoljno izvršenih cijena opcija na kupnju i prodaju za taj datum dospjeća. Stoga naposljetku istraživanja u ovom poslijediplomskom specijalističkom radu imamo 18 rezultata za dane kombinacije datuma opažanja i datuma dospjeća.

## 7 Zaključak

Rezultati procjena realiziranih funkcija gustoća vjerojatnosti pomoću visokofrekventnih podataka odnosno Kernelovog procjenitelja su nam pokazali kako lako možemo procijeniti funkciju gustoće vjerojatnosti pomoću visokofrekventnih podataka samo izmjenom širine pojasa Kernelovog procjenitelja. Također se pokazalo da je procijenjena realizirana gustoća vjerojatnosti ne samo mjerljiva ali i dovoljno precizna kako bi se koristila kao referentna funkcija gustoće vjerojatnosti kod komparativne analize prognostičke moći tri parametarski različita modela vrednovanja opcija. Grafički rezultati procjena impliciranih funkcija gustoće vjerojatnosti odabranih opcijskih modela te usporedbe s realiziranom funkcijom gustoće vjerojatnosti na datume dospijeća su pokazali da se Kernelov procjenitelj zaista može i aplikativno koristiti u komparativne svrhe. Grafički najmjerljiviji rezultati usporedbe su bili za većinu promatranih tržišnih indeksa te kombinacija datuma opažanja i datuma dospijeća, što podupire svrhu istraživanja ovog poslijediplomskog specijalističkog rada. Iz perspektive da je Kernelov procjenitelj zaista referentna funkcija gustoće vjerojatnosti, grafički možemo zaključiti da je Shimko model najbolji. Rezultati usporedbe Kolmogorov - Smirnov testom su pokazali da procijenjene vrijednosti gustoća vjerojatnosti ne dolaze od strane jednake distribucije vjerojatnosti. Nulta hipoteza (gdje smo testirali vrijednosti gustoće Kernelovog procjenitelja i vrijednosti implicirane gustoće vjerojatnosti) je u većini slučajeva bila odbačena na razini značajnosti 5% za sve tržišne indekse te sve kombinacije datuma opažanja i datuma dospijeća. Osim u slučaju DAX tržišnog indeksa, datuma opažanja 23.03.2018. i datuma dospijeća 21.09.2018. gdje je pokazano da procijenjene vrijednosti implicirane funkcije gustoće vjerojatnosti dobivene Shimko modelom i vrijednosti realizirane funkcije gustoće vjerojatnosti dobivene Kernelovim procjeniteljem, dolaze iz iste distribucije vjerojatnosti odnosno nulta hipoteza nije bila odbačena na nivou značajnosti 5%. To je značajan napredak u ovom području istraživanja. Rezultati Diebold - Mariano testa su pokazali kako u sedam kombinacija datuma opažanja i datuma dospijeća nismo odbacili nultu hipotezu kako modeli imaju jednaku prognostičku preciznost. Pokazalo se da u jednakom broju slučajeva Mixture Log-Normal model i Shimko model, Mixture Log-Normal i Edgeworth expansion model te Edgeworth expansion i Shimko model imaju istu prognostičku preciznost. Bitno je naglasiti da u slučaju DAX tržišnog indeksa na datum opažanja 22.06.2018. i datuma dospijeća 20.07.2018. svi modeli su imali međusobno jednaku prognostičku preciznost prema Diebold - Mariano testu. Stoga ne možemo zaključiti koji su modeli prognostički sličniji. Unatoč tome, prema grafičkim testovima i Kolmogorov - Smirnov testu možemo zaključiti da je u ovom istraživanju Shimko model najbolji. Rezultati istraživanja ovog specijalističkog poslijediplomskog rada su i znanstvene prirode. Naime, rezultati pokazuju novitet da se za referentnu funkciju gustoće koristi ona na temelju visokofrekventnih podataka. Metode usporedbe referentne funkcije gustoće vjerojatnosti s procijenjenom funkcijom gustoće neutralnom na rizik pokazat

će solidne rezultate koji daju preporuke za primjenu u akademskim istraživanjima kao i aplikativno investitorima te analitičarima financijskih tržišta. Rezultati su primjenjivi i na hrvatsko tržište kapitala odnosno tržišne indekse Zagrebačke burze d.d. Kod interpretacije i primjene metodologije na hrvatsko tržište kapitala trebat će uzeti u obzir nelikvidnost i smanjen volumen trgovanja. Ovim istraživanjem se indirektno ispituje i učinkovitost tržišta kod formiranja cijene budući da su u fokusu tržišni indeksi. Ovi očekivani rezultati su podloga za daljnje istraživanje primjene visokofrekventnih podataka kod procjene volatilnosti te kojim modelima se može prognozirati volatilnost bazirana na visokofrekventnim podacima. Što se tiče primjene očekivanih rezultata, a s obzirom na cilj provođenja komparativne analize prognostičkih modela u odnosu na referentnu funkciju gustoće temeljenu na visokofrekventnim podacima na datum dospijeca, moguće će biti uočiti određene karakteristike u okviru razvoja prediktivnih metoda i njihove optimizacije. Najveći doprinos je za analitičare i investitore „Fintech“ područja kojima je dana metodologija i preporuka kako postaviti parametre prognostičkih modela te koje su referentne financijske serije u svrhu usporedbe i praćenja budućih kretanja serija na tržištu kapitala. Znanstveni doprinos je vidljiv iz empirijski dokazanog smjera dosadašnjih istraživanja gdje usporedba impliciranih viših trenutaka s ostvarenim višim trenucima (visokofrekventni podaci) se koriste kao najbolji proxy nepoznatih karakteristika distribucije temeljne imovine.

# Bibliografija

- [1] Aljinović, Z., Marasović, B. (). Matematički modeli u analizi razvoja hrvatskog financijskog tržišta. Ekonomski fakultet Split..
- [2] Aljinović, Z., Poklepović, T., Šego, B. (2009). Trgovanje opcijama na svjetskim burzama. Računovodstvo i financije, 10, 106-116.
- [3] Ait-Sahalia, Y., Lo, A. W. (2000). Nonparametric risk management and implied risk aversion. Journal of econometrics, 94(2), 9-51.
- [4] Arnerić, J., Aljinović, Z., Poklepović, T. (2015). Extraction of market expectations from risk-neutral density. Zbornik radova Ekonomskog fakulteta u Rijeci, Časopis za ekonomsku teoriju i praks - Proceedings of Rijeka Faculty of Economics, Journal of Economics and Business, 33(2), 235-256.
- [5] Arnerić, J., Poklepović, T., Aljinović, Z. (2014). GARCH based artificial neural networks in forecasting conditional variance of stock returns. Croatian Operational Research Review, 5(2), 329-343.
- [6] Arnerić, J., Poklepović, T., Teai, J. W. (2018). Neural Network Approach in Forecasting Realized Variance Using High-Frequency Data. Business Systems Research Journal, 9(2), 18-34.
- [7] Bahaludin, H., Abdullah, M. H. (2017). Estimation of option-implied risk-neutral into real-world density by using calibration function. AIP Conference Proceedings, 1830(1), 40009(1-9).
- [8] Bahovec, V. Erjavec, N. (2009). Uvod u ekonometrijsku analizu. Element.
- [9] Bauwens, L. Giot, P. (2001). Econometric Modelling of Stock Market Intraday Activity (Advanced Studies in Theoretical and Applied Econometrics). Springer Science and Business Media.
- [10] Bauwens, L., Hafner, C. Laurent, S. (2012). Handbook of Volatility Models and their Applications, John Wiley and Sons.

- 
- [11] Bauwens, L., Pohlmeier, W., Veredas, D. (2008). High Frequency Financial Econometrics - Recent Developments. Springer Science and Business Media.
- [12] Bliss, R. R., Panigirtzoglou, N. (2002). Testing the Stability of Implied Probability Density Functions. *Journal of Banking and Finance*, 26(2), 381-422.
- [13] Bouden, A. (2007). Comparing Risk Neutral Density Estimation Methods using Simulated Option Data. *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 2, 1029-1037.
- [14] Börgers, T. (1992). Iterated elimination of dominated strategies in a Bertrand-Edgeworth model. *The Review of Economic Studies*, 59(1), 163-176.
- [15] Breeden, D. T., Litzenberger, R. H. (1978). Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, 51(4), 621-651.
- [16] Degiannakis, S., Floros, C. (2015). *Modelling and Forecasting High Frequency Financial Data*. Palgrave Macmillan.
- [17] Diebold, F. X., Gunther, T. A., Tay, A. S. (1998). Evaluating density forecasts with applications to financial risk management. *International Economic Review*, 39, 863-883.
- [18] Florescu, I., Mariani, M. C., Stanley, H. E. , Viens, F. G. (2016). *Handbook of High-Frequency Trading and Modelling in Finance*. John Wiley and Sons.
- [19] Hautsch, N (2012). *Econometrics of Financial High-Frequency Data*. Springer.
- [20] Jackwerth, J. C. (2000). Recovering risk aversion from option prices and realized returns. *Review of financial Studies*, 13(2), 433-451.
- [21] Jondeau, E., Poon, S. H., Rockinger, M. (2007). *Financial Modelling Under Non-Gaussian Distributions*. Springer Science and Business Media.
- [22] Jurun, E., Pivac, S., Arnerić, J. (2007). Historical and prognostic risk measuring across stocks and markets. *WSEAS transactions on business and economics*, 4(8), 126-134.
- [23] Lai, W. N. (2014). Comparison of methods to estimate option implied risk-neutral densities. *Quantitative Finance*, 14(10), 1839-1855.
- [24] Liu, X., Shackleton, M. B., Taylor, S. J., Xu, X. (2007). Closed-form transformations from risk-neutral to real-world distributions. *Journal of Banking and Finance*, 31(5), 1501-1520.

- 
- [25] Rebonato, R. (1999). *Volatility and Correlation in the Pricing of Equity, FX, and Interest Rate Options*. John Wilbey.
- [26] Rosenberg, J. V., Engle, R. F. (2002). Empirical pricing kernels. *Journal of Financial Economics*, 64(3), 341-372.
- [27] Rozga, A., Arnerić, J. (2013). Dependence between volatility persistence, kurtosis and degrees of freedom. *Investigación Operacional*, 30(1), 32-39.
- [28] Santos, A. D. (2011). *Implied probability density functions: Estimation using hypergeometric, spline and lognormal functions* (Master Thesis, Department of Finance, University of Lisbon)
- [29] Sun, P. (2013). *Risk neutral and real world densities for the SP 500 index during the crisis period from 2008 to 2009* (Doctoral Dissertation, Management School, Lancaster University).
- [30] Syrdal, S. A. (2002). *A study of Implied Risk-Neutral Density Functions in the Norwegian Option Market*. Working Paper, 13/2002.
- [31] Šego, B., Aljinović, Z. , Marasović, B. (2011). *Financijsko modeliranje*. Ekonomski fakultet Split.
- [32] Šestanović, T., Arnerić, J. , Aljinović, Z. (2018). Non-structural approach to implied moments extraction, *Economic Research*, 31(1), 1923-1939.
- [33] Thomson Reuters Database
- [34] Wickham, H., Grolemund, G. (2017). *R for Data Science: Import, Tidy, Transform, Visualize, and Model Data*. O'Reilly Media.

# Popis slika

1	Kernelov procjenitelj za index AEX na datum dospijeća 20.07.2018. . .	46
2	Kernelov procjenitelj za index AEX na datum dospijeća 17.08.2018. . .	47
3	Kernelov procjenitelj za index AEX na datum dospijeća 21.09.2018. . .	48
4	Kernelov procjenitelj za indeks CAC na datum dospijeća 20.07.2018. . .	49
5	Kernelov procjenitelj za indeks CAC na datum dospijeća 17.08.2018. . .	50
6	Kernelov procjenitelj za indeks CAC na datum dospijeća 21.09.2018. . .	51
7	Kernelov procjenitelj za index DAX na datum dospijeća 20.07.2018. . .	52
8	Kernelov procjenitelj za index DAX na datum dospijeća 17.08.2018. . .	53
9	Kernelov procjenitelj za index DAX na datum dospijeća 21.09.2018. . .	54
10	Kernelov procjenitelj za indeks MIB na datum dospijeća 20.07.2018. . .	55
11	Kernelov procjenitelj za indeks MIB na datum dospijeća 17.08.2018. . .	56
12	Kernelov procjenitelj za indeks MIB na datum dospijeća 21.09.2018. . .	57
13	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018. . . .	59
14	Rezultati usporedbe na datum dospijeća 17.08.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	60
15	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018. . . .	62
16	Rezultati usporedbe na datum dospijeća 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	63
17	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 23.03.2018. . . .	64
18	Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018. . . . .	65
19	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 20.04.2018. . . .	66
20	Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 20.04.2018. . . . .	67
21	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 18.05.2018. . . .	68
22	Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018. . . . .	69
23	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018. . . .	70
24	Rezultati usporedbe na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	71
25	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018. . . .	72
26	Rezultati usporedbe na datum dospijeća 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	73



27	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 20.04.2018. . .	74
28	Rezultati usporedbe na datum dospijeca 21.09.2018. i datum opažanja 20.04.2018. . . . .	75
29	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 18.05.2018. . .	76
30	Rezultati usporedbe na datum dospijeca 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018. . . . .	77
31	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018. . .	78
32	Rezultati usporedbe na datum dospijeca 17.08.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	79
33	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 18.05.2018. . .	80
34	Rezultati usporedbe na datum dospijeca 20.07.2018. i datum opažanja 18.05.2018. . . . .	81
35	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018. . .	82
36	Rezultati usporedbe na datum dospijeca 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	83
37	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 23.03.2018. . .	84
38	Rezultati usporedbe na datum dospijeca 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018. . . . .	85
39	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 18.05.2018. . .	86
40	Rezultati usporedbe na datum dospijeca 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018. . . . .	87
41	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018. . .	88
42	Rezultati usporedbe na datum dospijeca 21.09.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	89
43	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 22.06.2018. . .	90
44	Rezultati usporedbe na datum dospijeca 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	91
45	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 23.03.2018. . .	92
46	Rezultati usporedbe na datum dospijeca 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018. . . . .	93
47	Cijene opcija na kupnju i prodaju na datum opažanja 18.05.2018. . .	94
48	Rezultati usporedbe na datum dospijeca 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018. . . . .	95

# Popis tablica

1	Promatrana financijska tržišta na dane kombinacije datuma opažanja i datuma dospjeća . . . . .	29
2	Kritične vrijednosti uz pripadne razine značajnosti . . . . .	36
3	Deskriptivna statistika Kernelovog procjenitelja za datum dospjeća 20.07.2018. . . . .	47
4	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 17.08.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	61
5	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	64
6	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018. . . . .	66
7	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 21.09.2018. i datum opažanja 20.04.2018. . . . .	68
8	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018. . . . .	70
9	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 21.09.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	72
10	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	74
11	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 21.09.2018. i datum opažanja 20.04.2018. . . . .	76
12	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018. . . . .	78
13	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 17.08.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	80
14	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 20.07.2018. i datum opažanja 18.05.2018. . . . .	82
15	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	84
16	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018. . . . .	86
17	Procijenjeni parametri na datum dospjeća 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018. . . . .	88

---

18	Procijenjeni parametri na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	90
19	Procijenjeni parametri na datum dospijeća 20.07.2018. i datum opažanja 22.06.2018. . . . .	92
20	Procijenjeni parametri na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 23.03.2018. . . . .	94
21	Procijenjeni parametri na datum dospijeća 21.09.2018. i datum opažanja 18.05.2018. . . . .	96
22	Rezultati KS testa . . . . .	97
23	Rezultati DM testa . . . . .	98

## Sažetak i ključne riječi

Predmet istraživanja ovog specijalističkog poslijediplomskog rada je upotreba visokofrekventnih podataka koji bi se koristili kao benchmark za utvrđivanje prognostičke moći modela vrednovanja opcija. Navedeno istraživanje je u svrhu prognoziranja budućih kretanja sredine, varijance i drugih momenata financijskih serija. Vremenske financijske serije koje su predmet ovog istraživanja su put i call opcije na tržišne indekse CAC (Cotation Assistée en Continu), AEX (Amsterdam Exchange index), MIB (Milano Indice di Borsa) i DAX (Deutscher Aktienindex). Podaci su preuzeti iz financijske baze podataka Reuters. Istraživanje se provodi u dvije faze. Prva faza je faza procjene odnosno prognoziranje funkcije gustoće vjerojatnosti promatranih financijskih serija. Druga faza je faza usporedbe dobivenih funkcija gustoće vjerojatnosti s referentnom funkcijom gustoće na temelju visokofrekventnih podataka. Predmet istraživanja su modeli korišteni za prognoziranje buduće funkcije gustoće vjerojatnosti neutralne na rizik. Modeli koje koristimo i promatramo su: Shimko model, Mixture Log-Normal model i Edgeworth expansion model. U skladu s dosadašnjim istraživanjima cilj i svrha promatranja navedenih modela jest procjena i vrednovanje njihove prognostičke moći te procjene koji od njih je najprikladniji odnosno najbolji. Postoje ograničenja kod korištenja visokofrekventnih podataka kao što su nelikvidnost financijskog tržišta te samim time manjak podataka i kompleksnost u korištenju visokofrekventnih podataka. Ograničenja smo premostili koristeći podatke tržišnih indeksa zapadnih razvijenijih financijskih tržišta te korištenjem programskog jezika R u obradi podataka.

Ključne riječi: visokofrekventni podaci; funkcija gustoće vjerojatnosti; modeli vrednovanja opcija

## Summary and key words

The subject of this specialized postgraduate study is the use of high frequency data as a benchmark for determining the prognostic accuracy of the options pricing models. The research is for the purpose of forecasting the future movements of the environment, variance and other moments of the financial series. The time series of financial issues that are the subject of this study are the put and call options on the CAC (Cotation Assistée en Continu), AEX (Amsterdam Exchange Index), MIB (Milan Stock Exchange Index) and DAX (Deutscher Aktienindex) indices. Data is downloaded from the Reuters financial database. The research is conducted in two phases. The first stage is the estimation phase, .i.e forecasting the probability density function of the observed financial series. The second stage is the comparison phase of the obtained probability density functions with the reference density function based on high frequency data. The subject of the research were the models used to forecast the future risk-neutral probability density function. The models that were used and observed are: Shimko model, Mixture Log-Normal model and Edgeworth expansion model. In accordance with the research so far, the purpose of observing the mentioned models is to evaluate their prognostic accuracy and to conclude which of them is superior to others. There are limitations in the use of high frequency data such as financial market illiquidity and thus lack of data and complexity in the use of high frequency data. The limitations were overcome by using data of market indices of the more developed financial markets and by using the R programming language in data processing.

Keywords: high frequency data; probability density function; option pricing models

## Životopis

Rodena sam 13. svibnja 1990. godine u Zagrebu. Nakon završene V. gimnazije u Zagrebu, 2008. godine upisujem preddiplomski studij Matematike na Cleveland State University-u u Cleveland, Ohio. U listopadu 2009. godine nastavljam školovanje na PMF - Matematičkom odjelu. U rujnu 2013. upisujem diplomski studij Matematička statistika na istom fakultetu. Tijekom svog osnovnog i srednjeg obrazovanja sudjelovala sam na natjecanjima iz fizike, matematike i povijesti. Bila sam članica juniorske i seniorske reprezentacije Hrvatske u plivanju te polufinalistica Europskog Juniorskog prvenstva 2006. godine. Državni rekord u disciplini 50m slobodno sam ostvarila 2006. godine. Za vrijeme studija sudjelovala sam u organizaciji projekta "Noć istraživača" 2013. kao član studentske udruge PMF-a PRIMUS. Sudjelovala sam u organizaciji te kao predavač na "Ljetnoj Tvornici Znanosti" na Mediteranskom Institutu u Splitu 2013. godine. Iste godine taj projekt osvaja Google RISE nagradu za popularizaciju prirodnih znanosti i matematike. Kao član novinarske sekcije PMF-a, popularno-znanstvenog časopisa PRIMAT, pomažem oko prvih izdanja časopisa. U siječnju 2013. godine objavljen mi je stručni rad "Izometrije u Escherovim radovima" u znanstveno-stručnom časopisu Hrvatskog društva za geometriju i grafiku KOG. 2014. godine radim kao analitičar rizika investicijskih portfelja u timu investicijskih strategija u Deutsche Bank AG, Frankfurt am Main. Tamo sudjelujem na znanstvenom projektu "State Space Model and Affine Term-Structure Models Applied on Non-core European Government Bonds". Na fakultetu sam bila demonstrator iz kolegija: Euklidski prostori, Seminar: Matematika izvan matematike, Konstruktivne metode u geometriji, Primijenjena matematička analiza, Vjerojatnost i statistika. Nakon završetka studija zapošljam se u Hrvatskoj agenciji za nadzor financijskih usluga gdje trenutno radim kao analitičar u timu za systemske rizike. 2018. godine objavljen mi je znanstveni rad u koautorstvu "The impact of a takeover bid on the capital market efficiency" u znanstvenom časopisu UTMS Journal of Economics. Iste godine upisujem poslijediplomski specijalistički studij na Ekonomskom fakultetu, Sveučilišta u Zagrebu "Statističke metode za ekonomske analize i prognozi-ranje". 2019. godine upisujem doktorski sveučilišni studij na Ekonomskom fakultetu, Sveučilišta u Rijeci u sklopu projekta Europske Komisije „H2020 FINTECH“.