Sveučilište u Zagrebu

Ekonomski fakultet

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij

Poslovna ekonomija – smjer Analiza i poslovno planiranje

PRIMJENA SIMPLEKS METODE U PREHRANI STUDENTA

Diplomski rad

Marco Navarro Copa

Zagreb, srpanj 2024.

Sveučilište u Zagrebu

Ekonomski fakultet

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni studij

Poslovna ekonomija – smjer Analiza i poslovno planiranje

PRIMJENA SIMPLEKS METODE U PREHRANI STUDENTA

APPLICATION OF THE SIMPLEX METHOD IN STUDENT NUTRITION

Diplomski rad

Student: Marco Navarro Copa

JMBAG studenta: 0067556220

Mentor: doc. dr. sc. Krunoslav Puljić

Zagreb, srpanj 2024.

SAŽETAK

Tema rada je proučavanje problema prehrane studenta u okviru održivog razvoja. Rad je prvenstveno namijenjen studentima, osobama koje imaju status studenta i pravo obavljanja studentskih poslova iz razloga što je bilo potrebno izračunati budžet prehrane koji je baziran na minimalnoj studentskoj satnici, no rad također mogu koristiti pojedinci koji nastoje smanjiti troškove prehrane. Nakon što su se saznale cijene najjeftinijih proizvoda u određenim trgovačkim lancima u Zagrebu, došlo se do podataka o tome koliko koji proizvod sadrži određenih hranjivih tvari i kalorija. Metode istraživanja su uključivale metodu kompilacije kojom su se koristili podaci i modeli iz drugih sličnih radova te metodu modeliranja kojom se stvorio model problema koji je uključivao različita ograničenja i funkciju cilja. Za ograničenja modela uzeti su preporučeni minimalni i maksimalni dnevni unosi hranjivih tvari, kao i minimalni dnevni unos kalorija. Cilj rada je bio naći optimalnu kombinaciju proizvoda koja zadovoljava dovoljan unos nutritivnih vrijednosti za ostvarivanje zdrave prehrane, a koja minimizira troškove prehrane. Napravljena je prehrana za tri dana, prvi se dan sastojao od tri obroka, drugi od dva (iako je bilo planirano četiri obroka) te treći od dva obroka. Ukupni troškovi za prvi dan iznose 3.93€, za drugi 4.37€, a za treći dan 9.20€. Uspoređivao se najmanji mogući iznos budžeta za prehranu od 700.8€ i najveći mogući ukupni trošak prehrane od 166.7€, što je dovelo do zaključka da ne postoji slučaj u kojemu iznos budžeta nije dovoljan za pokrivanje troškova prehrane. Kasnije su prikazani dualni problemi modela za sva tri dana, kao i analiza osjetljivosti.

Ključne riječi: održivost, linearno programiranje, problem prehrane

SUMMARY

The topic of the paper is the study of the diet problem of a student within the framework of sustainable development. The work is primarily intended for students, people who have the status of a student and the right to perform student work, for the reason that was necessary to calculate the food budget, which is based on the minimum student hourly wage, but the work can also be used by individuals who strive to reduce costs. After finding out the prices of the cheapest products in certain retail chains in Zagreb, data was obtained on how much each product contains certain nutrients and calories. Research methods included a compilation method that used data and models from other similar works and a modeling method that created a model of the problem that included various constraints and an objective function. The recommended minimum and maximum daily intakes of nutrients, as well as the minimum daily intake of calories, were used as model constraints. The goal of the work was to find an optimal combination of products that provides sufficient intake of nutritional values for achieving a healthy diet, and which minimizes food costs. A diet for three days was prepared, the first day consisted of three meals, the second of two (although four meals were planned) and the third of two meals. Total costs for the first day are €3.93, for the second €4.37, and for the third day €9.20. The lowest possible food budget amount of €700.8 and the highest possible total food cost of €166.7 were compared, which led to the conclusion that there is no case in which the budget amount is not sufficient to cover food costs. Later, the dual problems of the models for all three days are presented, as well as the sensitivity analysis.

Keywords: sustainability, linear programming, diet problem

IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je diplomski rad isključivo rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na mojim istraživanjima i oslanja se na objavljenu literaturu, a što pokazuju korištene bilješke i bibliografija.

Izjavljujem da nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz necitiranog izvora te da nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava.

Izjavljujem, također, da nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

(vlastoručni potpis studenta)

_________Zagreb, 1. srpnja 2024.__

(mjesto i datum)

STATEMENT ON THE ACADEMIC INTEGRITY

I hereby declare and confirm by my signature that the final thesis is the sole result of my own work based on my research and relies on the published literature, as shown in the listed notes and bibliography.

I declare that no part of the thesis has been written in an unauthorized manner, i.e., it is not transcribed from the non-cited work, and that no part of the thesis infringes any of the copyrights.

I also declare that no part of the thesis has been used for any other work in any other higher education, scientific or educational institution.

(personal signature of the student)

_________Zagreb, 1. srpnja 2024.__

(place and date)

SADRŽAJ

1. UVOD

1.1.Predmet i ciljevi rada

Ovaj se diplomski rad bavi proučavanjem problema prehrane studenta u okviru održivog razvoja, a pri tome će se značajno koristiti simpleks metoda te istraživati njena primjena u prehrani studenta. Koristeći podatke dobivene putem dostupne literature i znanja stečena u sklopu izbornog kolegija linearno programiranje i teorija igara, ući će se u detaljniju analizu modela problema prehrane koji uključuje minimizaciju funkcije troškova uz zadana ograničenja. Drugim riječima, predmet rada je standardni problem linearnog programiranja. Konačan cilj rada je naći optimalnu kombinaciju proizvoda koja zadovoljava dovoljan unos nutritivnih vrijednosti za ostvarivanje zdrave prehrane, a koja minimizira troškove prehrane.

1.2.Metode istraživanja i izvori podataka

Metode istraživanja će uključivati metodu kompilacije kojom će se koristiti podatci i modeli iz drugih radova kao smjernice, metodu modeliranja kojom će se stvoriti model problema koji će sadržavati različita ograničenja i funkciju cilja te koji će biti riješen matematičkom metodom linearnog programiranja. U svrhu pisanja diplomskog rada koristit će se dostupna literatura na Internetu te podaci nađeni u knjigama i drugim pisanim izvorima. Primjerice, putem dostupne literature će se doći do podataka o tome koliko koji proizvod sadrži određene tvari (masti, bjelančevina i drugo), a kasnije će se ti podaci potvrditi na deklaracijama proizvoda i saznat će se cijene tih proizvoda u Zagrebu te će se uspoređivati s drugima. Svi izvori su navedeni u sekciji rada Popis literature.

1.3.Sadržaj i struktura rada

Nakon uvoda, u dijelu rada pod nazivom Održivi razvoj i upravljanje razvojem prvo će se definirati sam pojam održivog razvoja i proći kroz njegove dimenzije te objasniti ciljevi održivog razvoja u okviru Ujedinjenih naroda. U trećem poglavlju Problem prehrane u kontekstu ciljeva održivog razvoja, bit će riječi o tome kako se taj problem mijenjao kroz povijest, o pretpostavkama koje su bitne za model problema prehrane, kao i o samoj formulaciji modela. Analizirat će se drugi istraživački radovi koji su provedeni na istu temu. Kasnije će se govoriti više o linearnom programiranju i o tome kako se rješavaju problemi vezani za pojam preko simpleks metode, ući će se u tematiku dualnosti te će se analizirati osjetljivost u linearnom programiranju. U petom poglavlju će se rješavati problem prehrane studenta koristeći podatke dobivene putem provedenog istraživanja primjenjujući linearno programiranje, a u posljednjem dijelu diplomskog rada će se ponoviti svi važniji pojmovi i iznijeti zaključci.

2. ODRŽIVI RAZVOJ I UPRAVLJANJE RAZVOJEM

2.1.Poimanje održivog razvoja

Tražeći u literaturi definiciju održivog razvoja, može se naići na razne interpretacije tog pojma, ali ono što im je zajedničko je termin ravnoteža čime se upućuje na zadovoljavanje potreba sadašnjih generacija bez ugrožavanja mogućnosti budućih generacija da zadovolje svoje. Kako Ujedinjeni narodi reprezentiraju glavno tijelo koje daje smjernice za održivi razvoj, organizacija je 2015. godine predstavila dokument „Transforming our world: the 2030 Agenda for Sustainable Development", odnosno razvojnu strategiju koja predstavlja plan akcija za ljude, planet i blagostanje (LORA, 2019). U preambuli agende se spoznaje da je iskorjenjivanje siromaštva u svim svojim oblicima i dimenzijama najveći globalni izazov i neizostavan zahtjev za održivim razvojem. Plan će se provesti kooperativnim djelovanjem svih zemalja i sudionika. Programom se želi, kako je navedeno, pomoći ljudskoj rasi rješavanjem tiranije nastale siromaštvom kako bi se zaliječio i osigurao planet. Kako bi se svijet izveo na održivi i otporan put budućnosti, mora postojati predanost u donošenju odvažnih koraka koji će promijeniti trenutno stanje. U tom duhu, Ujedinjeni narodi su prezentirali ovaj plan koji sadrži 17 ciljeva održivog razvoja, kojima se prikazuje mjerilo i ambicije nove agende. Time se želi nastaviti u smjeru prethodno postavljenih ciljeva zvanih „Millennium Development Goals" i postići ono što se njima nije uspjelo. Novim se ciljevima nastoje realizirati svačija ljudska prava i jednakopravnost spolova. Oni su integrirani i nedjeljivi te uravnotežuju tri dimenzije održivog razvoja: društvo, gospodarstvo i okoliš (United Nations, 2015). Uspostavljena ravnoteža među te tri sastavnice održivog razvoja, to jest njezino primjenjivanje u praksi će osigurati dugoročan razvoj ljudskog društva u očuvanom okolišu.

2.2.Dimenzije održivog razvoja

Kao što je prethodno rečeno, postoje tri dimenzije održivog razvoja, a to su društvo, gospodarstvo i okoliš. Kada je riječ o društvu, onda se govori o tome kako ta komponenta podrazumijeva njegovanje zajednica uz poticanje kulturološke raznolikosti i očuvanje kulturne baštine. Isto tako, bitno je osiguravanje jednake dostupnosti na obrazovanje i zdravstvenu skrb, kao i postizanje jednakopravnosti svih članova društva te unaprjeđenje socijalnih prava. Gospodarstvo kao dimenzija održivog razvoja omogućuje porast blagostanja ljudi, održavanje stabilnosti cijena i razine zaposlenosti uz zadovoljavajuće prihode, uštedu troškova i ekonomsku efikasnost. Okoliš kao komponenta će uključivati razvoj planova i strategija upravljanja sa zadatkom očuvanja okoliša, smanjenja ili zaustavljanja zagađenja okoliša, održavanja stabilnosti klime. U sklopu ove komponente nastoji se postići razumna i učinkovita eksploatacija prirodnih resursa i brine se o njihovim kapacitetima te se štiti biološka raznolikost i priroda. Društveno-okolišna ravnoteža mora biti prihvatljiva za sve zajednice, bilo da je riječ o lokalnoj ili globalnoj razini, pri čemu je potrebno uvažiti osjetljivost okoliša. Gospodarsko-okolišna ravnoteža pretpostavlja poticajno i subvencionirano okruženje za ekonomski rast uz očuvanje prirodnih dobara, a društveno-gospodarska ravnoteža uključuje ravnomjeran ekonomski rast poduzeća i lokalnih zajednica (LORA, 2019).

2.3.Ciljevi održivog razvoja u okviru Ujedinjenih naroda

U ovom dijelu rada navest će se svih 17 ciljeva održivog razvoja objedinjenih u agendi Ujedinjenih naroda, ali će biti riječi i o „Millennium Development Goals“ ili skraćeno MDGs, prethodno postavljenim ciljevima te će se tako vidjeti sličnosti, odnosno razlike između te dvije skupine ciljeva. „Millennium Development Goals“ su formirali plan na koji su pristale sve države i sve vodeće svjetske razvojne institucije. Ima ih osam i obuhvaćaju širok domet, od prepolovljavanja stopa ekstremnog siromaštva do zaustavljanja širenja AIDS-a i pružanja općeg osnovnog obrazovanja, s rokom ispunjenja do 2015. godine. Oni su potaknuli neviđene napore da se zadovolje potrebe najsiromašnijih na svijetu. Ujedinjeni narodi također surađuju s vladama država, civilnim društvima i drugim partnerima kako bi se uzeo što veći zamah u ispunjavanju MDGs-a te kako bi se nastavilo s ambicioznom razvojnom agendom nakon 2015., kasnije poznatom pod nazivom „Transforming our world: the 2030 Agenda for Sustainable Development“ (United Nations, 2008).

Kao što je rečeno, u okviru MDGs-a, ima osam ciljeva i prvi je iskorijeniti ekstremno siromaštvo i glad. Ovaj cilj se dijeli na tri kategorije, a prva je prepoloviti razmjer ljudi čiji je prihod manji od $1.25 po danu u razdoblju od 1990. do 2015. godine. Druga kategorija je postići punu i plodonosnu zaposlenost te solidan rad za sve, uključujući žene i mlade ljude. Treća kategorija je imala svrhu prepolovljavanja proporciju ljudi koji pate od gladi u vremenskom periodu od 1990. do 2015. Drugi je cilj bio postizanje jedinstvene primarne edukacije, točnije osigurati da sva djeca, neovisno o tome radi li se o dječacima ili djevojčicama, budu u mogućnosti da završe program primarnog obrazovanja. Promoviranje ravnopravnosti spolova i osnaživanje žena, odnosno eliminacija nejednakosti spolova u osnovnom i srednjem obrazovanju po mogućnosti do 2005. te u svim razinama edukacije ne kasnije od 2015. godine je bio treći cilj dok se četvrti cilj bavio smanjivanjem smrtnosti djece, preciznije zadatak je bio dvotrećinsko smanjivanje stope smrtnosti djece stare do pet godina, u razdoblju od 1990. do 2015. Peti cilj je bio poboljšanje majčinskog zdravlja i taj se cilj dijeli u dvije kategorije, prva je reduciranje omjera smrtnosti majki za tri četvrtine, a druga je postizanje pristupa za brigu prema reproduktivnom zdravlju. Svrha šestog cilja je bila borba protiv AIDS-a, malarije i drugih bolesti te se dijeli u tri kategorije. Radi se o zaustavljanju, odnosno suzbijanju širenja AIDS-a, a nastojalo se ostvariti jedinstveni pristup liječenju od AIDS-a za sve kojima je bilo potrebno do 2010. godine i suzbiti širenje malarije i drugih većih bolesti. Sedmi cilj se bavio osiguravanjem održivosti okoliša. Nastojalo se integrirati principe održivog razvoja u politike zemalja i zaustaviti gubitak prirodnih resursa, kao i gubitka biološke raznolikosti, ali se htjelo i prepoloviti postotak populacije koji nije imao održiv pristup vodi sigurnoj za piće i osnovnim sanitarijama. Također, htjelo se ostvariti značajno poboljšanje u životima stanovnika sirotinjskih četvrti. Konačno, osmi cilj je razvitak globalnog partnerstva za razvoj. Ovo je uključivalo daljnje razvijanje otvorenih, predvidivih, nediskriminirajućih financijskih sustava i sustava trgovine temeljenih na pravilima, bavljenje posebnim potrebama najmanje razvijenih zemalja, bavljenje posebnim potrebama zemalja u razvoju koje nemaju izlaz na more i malih otočnih država u razvoju, sveobuhvatno bavljenje problemima s dugovima zemalja u razvoju. Nastojalo se isto tako, u suradnji s farmaceutskim poduzećima, omogućiti pristup cjenovno prihvatljivim osnovnim lijekovima u državama u razvoju te u suradnji s privatnim sektorom, učiniti dostupnima dobrobiti novih tehnologija, posebice informacijsko-komunikacijskih. Dolaskom 2015. godine može se vidjeti koliki su utjecaj imali „Millennium Development Goals" i temeljem toga donijeti određeni zaključci. MDG-s su najuspješniji globalni pokušaj u borbi protiv siromaštva u povijesti. Tome pridonosi činjenica da su vlade, međunarodne organizacije i grupe civilnog društva diljem svijeta pomogle prepoloviti stopu ekstremnog siromaštva u svijetu, kao i podatci da je više djevojčica u školama te da manje djece umire. Neki se zadatci poput borbe protiv smrtonosnih bolesti, primjerice malarije i AIDS-a, i dalje trebaju ispuniti (United Nations, 2015).

Potaknuti upravo tim neispunjenim ciljevima, nastupaju 17 ciljeva održivog razvoja nove agende Ujedinjenih naroda. Oni su redom sljedeći:

1. Okončati siromaštvo u svim njegovim oblici posvuda
2. Iskorijeniti glad, postići sigurnost hrane i bolju prehranu te promicati održivu poljoprivredu
3. Osigurati zdrav život i promicati blagostanje za sve u svim dobima

4. Osigurati uključivo i pravedno kvalitetno obrazovanje i promicati mogućnosti cjeloživotnog učenja za sve
5. Postići ravnopravnost spolova i osnažiti sve žene i djevojke
6. Osigurati dostupnost i održivo upravljanje vodom i sanitarnim uvjetima za sve
7. Osigurati svima pristupačnu, pouzdanu, održivu i modernu energiju
8. Promicati neprekidan, uključiv i održiv gospodarski rast, punu i produktivnu zaposlenost te dostojanstven rad za sve
9. Izgraditi otpornu infrastrukturu, promicati uključivu i održivu industrijalizaciju i poticati inovacije
10. Smanjiti nejednakost unutar i među državama
11. Učiniti gradove i ljudska naselja uključivima, sigurnima, otpornima i održivima
12. Osigurati održive obrasce potrošnje i proizvodnje
13. Poduzeti hitne mjere u borbi protiv klimatskih promjena i njihovih učinaka
14. Očuvati i održivo koristiti oceane, mora i morske resurse za održivi razvoj
15. Zaštititi, obnoviti i promicati održivo korištenje kopnenih ekosustava, održivo upravljati šumama, boriti se protiv dezertifikacije te zaustaviti i preokrenuti degradaciju zemljišta i zaustaviti gubitak biološke raznolikosti
16. Promicati miroljubiva i uključiva društva za održivi razvoj, omogućiti pristup pravdi za sve i izgraditi učinkovite, odgovorne i uključive institucije na svim razinama
17. Ojačati sredstva provedbe i revitalizirati globalno partnerstvo za održivi razvoj

Iako ih ima 17, ciljevi koji će se detaljnije proučiti su drugi i dvanaesti cilj iz razloga što oni imaju dodirnih točaka sa samom temom diplomskog rada, odnosno s ciljem postizanja zdrave prehrane. Kako su u agendi ti ciljevi prilično iscrpno napisani, autor će u radu istaknuti samo one dijelove ciljeva koji su najviše povezani s temom rada. Nadalje, ciljevi obuhvaćeni u novoj agendi su sadržajem prilično slični kao i MDG-s, samo što su podrobnije napisani pa se neće dublje u njih ulaziti jer bi se određeni dijelovi ponavljali u radu. U okviru drugog cilja, nalaže se iskorjenjivanje gladi do 2030. godine i osiguravanje svim ljudima, a posebice siromašnima i osobama u ranjivim situacijama, što uključuje dojenčad, pristup hranjivoj, sigurnoj i dostatnoj hrani tijekom cijele godine. Zadatak je isto tako okončati sve oblike pothranjenosti, uključujući postizanje do 2025. godine međunarodno dogovorenih ciljeva u pogledu zaostajanja u rastu i mršavljenja kod djece mlađe od 5 godina te osloviti prehrambene potrebe adolescentica, trudnica i dojilja te starijih osoba. Dvanaesti cilj propisuje prepolovljavanje globalnog otpada od hrane po glavi stanovnika na maloprodajnoj i potrošačkoj razini te smanjivanje gubitaka hrane duž lanca proizvodnje i opskrbe, uključujući gubitke nakon žetve. Također, do 2030. znatno smanjiti stvaranje otpada prevencijom, smanjenjem, recikliranjem i ponovnom uporabom (United Nations, 2015).

Prolaženjem kroz ciljeve održivog razvoja definirane od strane Ujedinjenih naroda, pokušava se prikazati povezanost problema prehrane s održivim razvojem, čime se ujedno tema diplomskog rada stavlja u kontekst smjera „Analiza i poslovno planiranje“. Općenito, ekonomija kao znanost se bavi najboljim iskorištavanjem raspoloživih resursa, ali mogu postojati restrikcije u načinu na koji se resursi mogu koristiti, koje se moraju uzeti u obzir. Prevedeno u terminima problema prehrane, primjerice, radit će se o restrikcijama koje se tiču minimalnih razina unosa određenih hranjivih tvari na dnevnoj bazi. U samoj prirodi problema prehrane je nabava tek tolike količine hrane s kojom se mogu zadovoljiti potrebe čovjeka za određenim hranjivim tvarima budući da se konstantno nastoje smanjiti troškovi nabave hrane, što znači da ne bi trebala postojati mogućnost nastajanja viškova hrane, odnosno nepotrebno bacanje hrane. Ovo je ujedno i opisano u dvanaestom cilju održivog razvoja dok će se utjecaj drugog cilja agende vidjeti u nastojanju nabave što raznovrsnije hrane kako bi se omogućila što zdravija prehrana.

3. PROBLEM PREHRANE U KONTEKSTU CILJEVA ODRŽIVOG RAZVOJA

3.1.Povijest problema prehrane

Problem prehrane je dugo privlačio pažnju ekonomista zbog svoje očite i direktne primjene postupka ograničene minimizacije troškova, postupka kojeg ekonomisti podučavaju na svim razinama obrazovanja. Ekonomistima, ali i ostatku društva, važnost problema prehrane je narasla nedavnim dolaskom vala rasta cijena prehrambenih proizvoda. Težnja da potrošači minimiziraju troškove zadovoljavanja osnovnih prehrambenih potreba ne može biti beznačajna stvar budući da u svijetu postoji veliki dio pojedinaca koji ne ispunjavaju te potrebe u bilo kojoj danoj godini (Bassi, 1976). Problem prehrane jedan je od prvih problema optimizacije koji je proučavan još u 1930-ima i 1940-ima. Prvo je bio motiviran željom vojske da zadovolji nutritivne potrebe vojnika, a da pritom smanji troškove. Među najranijim istraživačima problema je George Joseph Stigler koji je postavio izvorni problem prehrane u 1945. godini. Napravio je utemeljenu pretpostavku o optimalnom rješenju linearnog programa pomoću heurističke metode. Njegova procjena o trošku optimalne prehrane bila je $39.93 godišnje (korištene su cijene proizvoda iz 1939. godine). Jack Laderman se kasnije bavio rješavanjem Stiglerovog modela, ali s novom simpleks metodom, što je ujedno bio prvi proračun većih razmjera u optimizaciji. Rezultat toga je pokazao da su Stiglerova nagađanja o optimalnom rješenju bila pogrešna za samo 24 centa godišnje (University of Cambridge, 2010). Od Stiglerovog temeljnog rada, dogodile su se važne promjene koje imaju snažan utjecaj ne samo na formulaciju problema, već i na metodologiju kojom se sam problem rješava. Za početak, cijene proizvoda su porasle puno brže od indeksa potrošačkih cijena u razdoblju nakon Stiglerovog rada. Nadalje, nutricionisti su već u 1970-ima identificirali gotovo dvostruko više osnovnih prehrambenih potreba nego što je to bilo 1945. godine te je danas dostupno mnogo više vrsta hrane. Primjerice, smrznuta hrana danas je uobičajena u supermarketima, ali je bila rijetkost 1945. Konačno, tek je 1947. godine George Dantzig usavršio simpleks metodu za rješavanje problema linearnog programiranja, kao što je upravo problem prehrane (Bassi, 1976). Otada, metoda je postala možda najčešće korištena od svih tehnika optimizacije. Čini se da su dva glavna čimbenika pridonijela ovoj popularnosti. Prvi bi bio primjećivanje da je simpleks metoda vrlo učinkovita u praksi dok je drugi činjenica da metoda daje vrlo cjelovito rješenje problema (Anderson i Nash 1987, str. 1).

3.2.Pretpostavke za model problema prehrane

U problemima optimizacije s ograničenjima, funkcija cilja određuje što treba maksimizirati ili minimizirati, a restrikcije se izražavaju kao ograničenja. Vrijednosti varijabli odluke moraju biti odabrane tako da minimiziraju ili maksimiziraju funkciju bez kršenja bilo kojeg od ograničenja. U nekim slučajevima, ove vrijednosti neće nužno biti cijeli brojevi budući da se pretpostavlja da su varijable odluke kontinuirane, obuhvaćajući bilo koju pozitivnu ili nultu vrijednost. Linearno programiranje koristi se za probleme optimizacije s ograničenjima pri čemu funkcija cilja i sva ograničenja imaju linearni oblik. U tipičnom problemu maksimiziranja, veće vrijednosti varijabli odluke povećavaju funkciju cilja. Donositelj odluke tada preferira odabir većih vrijednosti varijabli, ali ograničenja postavljaju restrikcije na moguće veličine. Ograničenja često imaju oblik nejednakosti i navode da linearne funkcije varijabli moraju biti manje ili jednake gornjoj granici, isto tako se podrazumijeva da niti jedna od varijabli odluke ne može biti negativna. Rješenje problema linearnog programiranja je postignuto kada su sva ograničenja zadovoljena i postignut je maksimum ili minimum, ovisno o tim ograničenjima. To se može dogoditi kada su samo neka od ograničenja obvezujuća dok za druga vrijedi stroga nejednakost (Soper 2004, str. 337). Prethodno su navedene pretpostavke koje se općenito odnose na probleme linearnog programiranja, a dalje se navode pretpostavke koje se posebno odnose na model problema prehrane kojim se bavi ovaj rad. Model problema prehrane koji će se istraživati u ovom radu je u užem smislu namijenjen studentima budući da je sam autor rada student, ali i pojedincima koji bi se htjeli zdravije hraniti, ali nisu u najboljem financijskom stanju pa nastoje smanjiti troškove. U širem smislu, model bi mogle koristiti sve osobe neovisno o svom financijskom stanju pa bi se jače osjetio učinak smanjenja viškova hrane, odnosno bacanja hrane jer funkcija cilja nalaže minimiziranje troškova pa pojedinac kupuje tek toliko hrane koliko će i konzumirati i koja će zadovoljiti dnevne nutritivne potrebe. Isto tako, ovaj model je namijenjen prvenstveno studentima zato što će kao jedno od ograničenja biti budžet koji osoba ima za kupovanje namirnica. Budžet će se računati na bazi satnice studentskih poslova. Druga pretpostavka je da student, odnosno pojedinac živi u Zagrebu jer cijene proizvoda koji će se kupovati nisu jednake u svim dijelovima Hrvatske, a i autor ima prebivalište u Zagrebu pa će se proučavati cijene prodavaonica u glavnom gradu. Već kad se govori o cijenama, važno je napomenuti da će se za određeni proizvod plaćati određena cijena i ta će cijena rasti proporcionalno ako će se kupovati veća količina toga proizvoda. Drugim riječima, neće se uzimati u obzir popusti ili sniženja koja dolaze kupovanjem više istih proizvoda, kao ni mogući gratis proizvodi na koje osoba ponekad ima pravo kupovanjem određenog artikla. Sljedeća pretpostavka je da osoba nema nikakvih preferencija po pitanju odabira hrane, u smislu da uzima ono što smatra ukusnim, a izbjegava ostale stvari. To također znači da neće prakticirati neki određeni tip prehrane, primjerice paleo prehrana ili vegetarijanstvo, već će moći konzumirati svaki proizvod. Na ovo se nadovezuje pretpostavka o tome da osoba nema nikakvih alergija na određene prehrambene proizvode ili nekih drugih zdravstvenih prepreka koje bi je sprječavale u konzumiranju namirnica. Posljednja pretpostavka se tiče budžeta namijenjenog za potrošnju na hranu, a s njom ujedno dolazi i razlog zašto je model prehrane kojim se bavi rad namijenjen prvenstveno studentima. Studenti su u mogućnosti obavljati studentske poslove, a minimalna naknada za obavljanje studentskih poslova po satu u 2023. godini iznosi 4.38 eura neto (MZO RH, 2022). Budžet namijenjen za prehranu će se onda računati tako što će se pomnožiti iznos minimalne satnice s brojem sati u radnim danima u mjesecu. Radni dani će biti od ponedjeljka do petka, a pretpostavit će se da studenti tim danima rade osam sati, odnosno jednu radnu smjenu. Na taj budžet neće se dodavati drugi novčani primici koje bi osoba mogla ostvariti.

3.3.Formulacija modela problema prehrane

Formulacija optimizacijskog problema, kao što je problem prehrane, uključuje prikupljanje podataka, definiranje općih ciljeva i zahtjeva dane aktivnosti te njihovo pretvaranje u niz dobro definiranih matematičkih izraza. Točnije, formulacija problema optimizacije uključuje:

1) Odabir jedne ili više varijabli optimizacije
2) Odabir funkcije cilja
3) Identificiranje skupa ograničenja

Funkcija cilja i ograničenja moraju biti funkcije jedne ili više optimizacijskih varijabli (Bhatti 2000, str. 2). Postupak rješavanja zadatka kojim se bavi ovaj rad, odnosno koraci koji moraju biti ispunjeni su u određenoj mjeri slični onima kakvi se mogu pronaći kod modelskog pristupa koji operacijska istraživanja koriste pri rješavanju problema. Generalno, kao i kod održivog razvoja, ovdje je slučaj postojanja više definicija operacijskih istraživanja među kojima se ističe ona da se operacijska istraživanja bave matematičkim modeliranjem realnih procesa u svrhu donošenja optimalnih odluka. Drugim riječima, to je disciplina koja primjenjuje matematičke modele i metode optimizacije kako bi se znanstvenim pristupom rješavanju problema pomoglo doći do boljih odluka u upravljanju složenim sustavima (Lukač i Neralić 2012, str. 1). To bi značilo da se operacijska istraživanja primjenjuju na probleme koji se tiču načina provođenja i koordinacije operacija, odnosno aktivnosti unutar organizacije, a priroda organizacija je u suštini nematerijalna pa se operacijska istraživanja intenzivno primjenjuju u tako različitim područjima kao što su proizvodnja, transport, financijsko planiranje, zdravstvo, vojska i drugo. Prema tome, širina njihove primjene je neobično velika (Hillier i Lieberman 2001, str. 2). Iako postoje razne definicije koje se razlikuju u nijansama, ono što je sigurno je da se operacijska istraživanja koriste modelskim pristupom rješavanju realnih problema, pri čemu se rješavanje provodi u nekoliko faza. One su sljedeće:

1) Prikupljanje podataka za formulaciju realnog problema koji treba riješiti
2) Formulacija odgovarajućeg matematičkog modela – model je zapravo matematička aproksimacija stvarnog problema i sadržava varijable koje imaju realno značenje, funkciju cilja ili više njih te ograničenja na varijable, u posebnom slučaju ako su ispunjene pretpostavke linearnosti pa je funkcija cilja linearna, a ograničenja su linearne nejednadžbe ili jednadžbe, uz ograničenja nenegativnosti varijabli, radi se o problemu linearnog programiranja
3) Rješavanje modela, to jest problema matematičkog programiranja – najčešće se u tu svrhu koristi odgovarajuća metoda za rješavanje na računalu i primjenjuje se raspoloživa programska podrška, primjerice za rješavanje problema linearnog programiranja može se koristiti simpleks metodom koristeći se programskim paketom LINGO ili alatom Solver u MS Excelu
4) Implementacija dobivenog rješenja (Lukač i Neralić 2012, str. 2)

Rješavanje problema minimuma linearnog programiranja simpleks metodom se donekle razlikuje od rješavanja problema maksimuma, uglavnom u fazi postavljanja početnog baričnog rješenja. Budući da je jedna od prvih ekonomskih primjena problema linearnog programiranja bio problem prehrane, prvo će se razmotriti ekonomska interpretacija tog problema. Riječ je o programu prehrane neke grupe ljudi (vojne postrojbe, studentska menza) ili nekih drugih subjekata s namjerom da izabrana hrana sadrži u određenoj količini sve potrebne hranjive elemente, primjerice kalorije, bjelančevine, ugljikohidrate, masti, a da troškovi za pripremu obroka budu minimalni. Neka bude zadano da se izbor hrane provodi između n artikala prehrane označenih s $H_1, H_2, \dots, H_n$ koji su dostupni na određenom tržištu, a tržišne cijene po jedinici j-tog proizvoda su b_j. Hranjive tvari koje se nalaze u tim proizvodima prehrane su označeni s $E_1, E_2, \dots, E_m$ i neka je a_{ij} iznos i-te hranjive tvari sadržane u jedinici j-tog proizvoda. Nadalje, c_i predstavlja minimalni zahtjev za i-tom hranjivom tvari, odnosno radi se o količini hranjive tvari koja mora biti sadržana u optimalnom obroku dok će y_j biti broj jedinica j-te vrste hrane. Prikazano u tablici, to bi izgledalo ovako:

Tablica 1: Opći oblik nutritivne tablice

Hranjive tvari	Vrste hrane (proizvodi)				Minimalni zahtjevi za hranjivim tvarima
	H_1	H_2	$\dots$	H_n	
E_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	c_1
E_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	c_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	c_m
Cijene proizvoda	b_1	b_2	$\dots$	b_n	

Izvor: Babić, Z. (2005.), *Linearno programiranje*, Split, Sveučilište u Splitu Ekonomski fakultet

Elementi a_{ij} čine matricu A koja se naziva nutritivna matrica. Za formulaciju problema prehrane potrebno je odrediti funkciju cilja koju predstavljaju ukupni troškovi prehrane koje treba minimizirati pa ona izgleda ovako: min $\sum_{j=1}^{n} y_j b_j$. Kako u jednoj jedinici j-te vrste hrane postoji a_{ij} jedinica i-te hranjive tvari, umnožak $y_j a_{ij}$ označava količinu te hranjive tvari u y_j jedinica hrane H_j pa se stoga zahtjev da u obroku kojeg čine sve vrste hrane, može zapisati kao $\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij} \geq c_i, i = 1, 2, \dots, m$ te $y_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$. Uvjet nenegativnosti postoji jer u stvarnom svijetu u optimalnom obroku neke vrste hrane ima, što odgovara vrijednosti $y_j > 0$, ili nema, što odgovara vrijednosti $y_j = 0$. Kako je ovaj problem tipičan problem minimuma linearnoga programiranja, postoje određene pretpostavke koje trebaju biti zadovoljene. Prva je ta da je funkcija troškova linearna, što znači da troškovi zavise o količini kupljenih namirnica, to jest po istoj cijeni se kupuje i mala i velika količina hrane. Druga pretpostavka kaže da su elementi nutritivne matrice konstantni. Općenito govoreći, simpleks metoda daje samo bazična rješenja, a ona najviše imaju m komponenti različitih od nule pa će problem prehrane biti realniji što je broj ograničenja *m* veći. Također, optimalni obrok će biti i raznovrsniji što je broj vrsta hrane veći (Babić 2005, str. 144).

3.4.Analiza drugih istraživačkih radova na temu problema prehrane

U ovom dijelu rada će se proučiti razna istraživanja vezana za temu problema prehrane. Prvo istraživanje „Primjena linearnog programiranja u problemu prehrane studenata“ je napisano kao članak u sklopu časopisa „Međunarodni časopis o naprednim trendovima u računalnim znanostima i inženjerstvu“ od strane autora N. A. Baki, N S. M. N Mangsor i M. Khairi A

Razak. U tom istraživanju iz 2019. godine provedena je anketa na uzorku od 100 studenata, a svrha ankete je bila otkriti obrazac prehrane svakog od njih, u smislu da se zahtijevalo da odgovore što vole jesti za doručak, ručak i večeru. Istraživanje se temeljilo na jelovnicima koje nudi kantina na sveučilištu UiTM Kuala Terengganu. Izbor jelovnika i prijedlog u anketi dobiven je kratkim intervjuom provedenim s osobljem kantine dok se nutritivni sadržaj svakog jelovnika dobiva s internetske stranice Ministarstva zdravstva. Kako bi se dobilo izvedivo rješenje za ovaj problem prehrane, proučavala se samo količina 6 hranjivih tvari, a one su proteini, masti, ugljikohidrati, kalcij, fosfor i vitamin C, iz razloga što zadovoljavanje potrebne količine svih hranjivih tvari odjednom realno nije moguće. Problem linearnog programiranja za svakog studenta je različit budući da im se međusobno razlikuju preferencije u odabiru određenih jelovnika, a u članku je detaljnije opisan primjer studenta 26. Temeljem danih odgovora, 100 prehrana je izračunato putem alata Solver u Microsoft Excelu tako što je Solver rješavao probleme linearnog programiranja koristeći simpleks metodu. U slučaju da se nije moglo naći rješenje za neki model, meni za tog studenta je zanemaren. Ako bi se međusobno uspoređivali svi meniji dobiveni putem Solvera, meni koji ima najmanji trošak od RM 7.90 uključuje 2 komada bijelog kruha, 18 komada kremastih krekera, 4 zdjelice žitarica i dva serviranja miješanog povrća. Međutim, ovaj meni možda ne bi zadovoljio preferencije mnogih studenata zbog ponovljenog izbora jelovnika za 3 obroka. Neki meniji su imali trošak preko RM 100, što je nerazumno, a razlog tomu je odabir hrane koja ima premalo određenih hranjivih tvari. Kao zaključak se navodi da na osnovi dobivenih menija, najbolji su oni koji uključuju povrće, kruh, žitarice, kremaste krekere i prženu piletinu, ali ipak, mnogi studenti sveučilišta UiTM Kuala Terengganu ne preferiraju povrće u svojoj prehrani na dnevnoj bazi. Meniji otkriveni putem ovog istraživanja mogu biti primjerena rješenja samo za studente ovog sveučilišta jer će druga sveučilišta ili institucije imati drugačije jelovnike u ponudi, odnosno različite cijene (Baki, N Mangsor i Khairi M Razak, 2019).

Drugo istraživanje koje će se proučiti je „Optimalan DASH model prehrane za osobe s hipertenzijom pomoću pristupa linearnog programiranja“. Radi se o članku u sklopu časopisa „Otvoreni časopis optimizacije“, a autori su N. I. C. Ndulue, M. Nnanna i A. C. Iwuji. Linearno programiranje je najpopularnija tehnika za odabir najjeftinijih mješavina hrane kako bi se zadovoljile specifične prehrambene potrebe određene skupine ljudi zbog općeg zdravlja ili razloga povezanih s bolešću. Hipertenzija je tihi ubojica, a njezina učestalost, posebice u zemljama u razvoju, koja se uglavnom povezuje s demografskim, okolišnim i genetskim čimbenicima, postaje alarmantna. Klinički je dokazano da DASH dijeta sprječava i kontrolira hipertenziju, a ovo istraživanje se bavilo nalaženjem modela koji bi omogućio dnevni optimalan plan DASH prehrane za ljude s hipertenzijom, na način da je cilj bio ostvariti dnevne planove prehrane s minimalnim troškovima koji zadovoljavaju gornji i donji podnošljivi unos hranjivih tvari DASH dijete za različite dnevne razine kalorija. Rješenja problema, odnosno optimalni planovi prehrane za određene dnevne razine kalorija, počevši od 1800 pa sve do 3000, dani su u tablici u kojoj su za prehrambene proizvode uzeti mrkva, kikiriki, kruh, slatki krumpir, mlijeko, naranča, lubenica i riba. Cijene serviranja su prikazane u novčanim jedinicama Naira te je prikazan ukupan trošak pojedinih planova prehrane, ali treba uzeti u obzir da iako je primarni cilj istraživanja bio minimiziranje troškova, ako se pojedincu ne sviđa kombinacija namirnica u ishodu dobivenog optimalnog plana prehrane, određene modifikacije plana mogu biti napravljene tako što će se neki proizvodi zamijeniti (Iwuji, Nnanna i Ndulue, 2016).

Sljedeće istraživanje pod nazivom „Primjena genetskog algoritma s više ciljeva na problem modificirane prehrane“ autora E. Kaldirim i Z. Köse opisuje kako se problem prehrane može riješiti razvijanjem aplikacije, točnije optimizacijskog programa koji omogućuje korisnicima dnevni meni koji sadrži sve potrebne količine hranjivih tvari uz minimalni trošak i maksimalnu ocjenu. Ocjena se dobiva od strane korisnika tako što on ocjenjuje sve proizvode u bazi podataka ili grupe obroka na skali od 0 do 10. Program isto tako koristi podatke poput spola i starosti osobe kako bi odredio dnevne prehrambene i energetske potrebe. Ovaj je projekt ujedno i unaprjeđena verzija rada autora A. Kahraman i A. Seven, ali za razliku od njihovog rada, ovdje su se koristila dva cilja (minimalni trošak i maksimalna ocjena) odvojeno i implementirao se najsuvremeniji genetski algoritam s više ciljeva, NSGA-II (na engleskom Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II). Većina informacija je dobivena iz Nacionalne baze podataka o hranjivim tvarima za standardnu referencu, izdanje 17, od strane Ministarstva poljoprivrede SAD-a. Tablice podataka koje se koriste pri rješavanju problema su tablice s osobnim podatcima, tablice s podatcima o hrani i tablica s troškovima. U prvu grupu tablica spadaju tablice DRI (referentni prehrambeni unos) i RDA (preporučeni dnevni unos) te njihovim korištenjem se dobivaju informacije o maksimalnoj i minimalnoj količini vitamina, elemenata i energije. Kasnije se koriste tablica AI koja prikazuje minimalnu vrijednost dnevnog unosa hranjivih tvari i dopuštene gornje granice unosa te tablica UL koja služi za prikaz maksimalne vrijednosti dnevnog unosa hranjivih tvari. Važnost ovih vrijednosti je u tome što služe kao pokazatelji za zdravstvene rizike u slučaju da osoba uzme nedovoljnu količinu hranjivih tvari ili ih uzme više od gornje granice, a same vrijednosti AI-a i UL-a se mogu mijenjati ovisno o broju godina i spolu. Autori završavaju svoj rad napominjući kako postoji mjesta za poboljšanje samog projekta. Kako navode, u stvarnom svijetu zdrav dnevni obrok bi se idealno trebao sastojati od najmanje tri različite vrste jela, što ovdje nije slučaj te se kao poboljšanje predlaže kategorizacija jela na jela za doručak, jela za ručak, jela za večeru i druga jela. Također, kako bi se unaprijedio projekt, mogu se implementirati i testirati drugi najsuvremeniji pristupi genetskih algoritama s više ciljeva (Kaldirim i Köse, 2006).

U članku „Robusni optimizacijski pristup problemu prehrane s ukupnim glikemijskim opterećenjem kao ciljnom funkcijom" autora E. Bas, fokus je na uvođenju modela mješovitog cjelobrojnog programiranja za problem prehrane s vrijednostima glikemijskog opterećenja (GL) hrane kao objektivnih parametara funkcije. Problem prehrane s funkcijom minimalnog troška dobro je poznat u literaturi, ali nije predložen problem prehrane s minimalnim ukupnim dnevnim GL vrijednostima hrane koja zadovoljava dnevne prehrambene zahtjeve i zahtjeve veličine porcije. Pretpostavlja se da su vrijednosti glikemijskog opterećenja podložne nesigurnosti, a upravo tu nastupa pristup robusne optimizacije koji se koristi za uzimanje u obzir te nesigurnosti u GL vrijednostima hrane. Osoba koja je donositelj odluke fleksibilna je u podešavanju stupnja neizvjesnosti umjesto da pretpostavlja najgori mogući scenarij. Provedena je eksperimentalna analiza s ukupno 177 namirnica na temelju nutritivnih zahtjeva i zahtjeva za veličinom serviranja te osnovnih grupa namirnica koje preporučuju Ministarstvo zdravstva i socijalne zaštite SAD-a i Ministarstvo poljoprivrede SAD-a. Rezultati eksperimentalne analize s različitim scenarijima daju drugačija rješenja za razne stupnjeve nesigurnosti. Međutim, neke se namirnice često nalaze u optimalnim rješenjima. Ove namirnice su i u literaturi savjetovane kao dio svakodnevne prehrane za postizanje niske razine glukoze u krvi. Iako predloženi problem prehrane s minimalnim ukupnim GL-om doprinosi zadovoljavanju dnevnih nutritivnih zahtjeva i zahtjeva za veličinom serviranja s minimalnom razinom učinka na razinu glukoze u krvi, on ima nekoliko ograničenja. To je osnovni problem prehrane i pretpostavlja da je ukupni GL linearna kombinacija broja veličina porcija s GL vrijednostima hrane. Nadalje, ne uzima u obzir druge čimbenike kao što su nekoliko kombinacija namirnica i njihovi različiti učinci na razine glukoze u krvi. Ove faktore bi trebalo uzeti u obzir za buduća istraživanja (Bas, 2014).

Iduća dva istraživanja su provedena od strane autora M. Mamat i N. M. M. Noor i drugih te su po temi bliski jedno drugome. Dva su čimbenika koji utječu na problem prehrane, a to su porast broja oboljelih od dijabetesa i drugih bolesti povezanih s prehranom te oscilacija cijena hrane. U ovom se radu raspravlja o problemu ljudske prehrane s nejasnom cijenom, a koristilo se linearno programiranje s neizrazitim koeficijentom cilja korištenjem linearne funkcije pripadnosti. Općenito, pristup neizrazitog linearnog programiranja koristi se za izračunavanje količine hranjivih tvari u hrani koja se uzima i smatra se procjenom prehrambenih potreba ljudskog tijela u svakodnevnoj rutini. Rezultat je pokazao kako je neizvjesnost cijena hrane malo utjecala na budžet prehrane. Razlike u rješenju između problema normalne prehrane korištenjem modela problema prehrane s minimalnim troškovima (MCDP) i problema prehrane s neizvjesnom cijenom hrane korištenjem modela MCDP s neizrazitim koeficijentom cilja (MCDP-FOC) su ove: stvarne hranjive tvari za vitamin E, kalij i natrij jednake su vrijednosti u pogledu dnevnih potreba za hranjivim tvarima dok su ostale hranjive tvari (13 vrsta) različite, postoji 11 vrsta hrane u MCDP rješenju i 14 vrsta u MCDP-FOC, razlika u cijeni je oko RM 5.45 po danu, a ukupna razlika u mjesecu je otprilike oko RM 162.50. Kao zaključak se također iznosi da je najskuplja dijeta s niskim udjelom ugljikohidrata (Mamat i sur., 2011). Slično kao kod prvog, i drugi rad se bavi planiranjem uravnotežene prehrane korištenjem pristupa neizrazitog linearnog programiranja te se isto tako navodi u uvodu kako se poremećaj prehrane i način života vezan uz bolesti smatraju kritičnim problemom u svijetu, a uzrocima ovih problema se smatra vesternizacija prehrambenih navika, prehrambena neuravnoteženost i depresija. Planiranje uravnotežene prehrane prilagođeno svakom korisniku uključuje raznovrsnu hranu nekoliko puta dnevno te će ono isto pomoći korisnicima da zadovolje prehrambene potrebe ljudskog tijela u svakodnevnoj rutini i da spriječe kronične bolesti poput dijabetesa i srčanog udara. Odabrano je 40 vrsta uzoraka hrane, a broj uzoraka hranjivih tvari je 27 vrsta. Cijene hrane u RM prikupljene su iz lokalnih trgovina mješovitom robom u ožujku 2009. u Terengganuu, Malezija. Potrebe za hranjivim tvarima bile su one za tridesetogodišnju ženu koja živi sjedilačkim načinom, a preuzete su iz Preporučenog unosa hranjivih tvari (RNI) Malezije. Prihvatljivi raspon raspodjele makronutrijenata (AMDR) za ugljikohidrate, masti i proteine je 45% do 65%, 20% do 35%, odnosno 10% do 35% kalorija. Napravljena je tablica u kojoj su uneseni dobiveni rezultati. Primjerice, za 1982 kcal energije, 4 kcal/g kalorija odgovara najviše 322 grama ugljikohidrata, 35% kalorija odgovara najviše 77.078 grama masti (Mamat i sur., 2012).

Za razliku od prethodnih istraživanja, sljedeće istraživanje autora G. Gallenti pod nazivom „Korištenje računala za analizu input potražnje u upravljanju farmom: Višekriterijski pristup problemu prehrane“, napisano je u obliku članka u zborniku radova s konferencije te je cilj ovog rada analizirati problem prehrane svinja pomoću modela operacijskog istraživanja s nekoliko proturječnih kriterija, ekonomskih i prehrambenih. Teorijski pristup sastoji se od prilagodbe odlukama proizvođača suvremene teorije potrošačke potražnje, Lancasterovog

„pristupa karakteristikama“, koji je u biti višekriterijski proces odlučivanja. U tom kontekstu, višekriterijske metode odlučivanja su, korištenjem uobičajenog računalnog programa (Excel), postale operativno jednostavan alat za rješavanje problema formulacije stočne hrane. Potreba za hranjivim tvarima (proteini, masti, sirova vlakna i drugi) za proizvodnju poljoprivredno-prehrambenog proizvoda visoke kvalitete predstavlja slučaj proučavanja ovog istraživanja. Matematička metoda implementirana pomoću Excela ispostavila se kao vrlo fleksibilan alat za postizanje nekih ciljeva farme kao što su poboljšanje kvalitete i konkurentnosti proizvoda, kontroliranje troškova hranjenja, precizno formuliranje specifičnih obroka s različitim sadržajem nutrijenata ovisno o ciljevima farme, tržišnim prilikama, specifičnim karakteristikama kvalitete hrane za životinje (usjeva), izazovima u cijeni hrane, specifičnim obrocima za određenu životinju (Gallenti, 1997).

U istraživanju „Model cjelobrojnog linearnog programiranja za problem prehrane McDonald's-ovih jelovnika u Maleziji“ autora N. F. Mohamed, N. A. Mohamed, N. H. Mohamed i N. A. Mohamed, nastoji se riješiti problem prehrane McDonald's-ovog seta jelovnika kako bi se pronašli optimalni troškovi i zadovoljile dnevne kalorijske i nutritivne potrebe osobe. Bilo je potrebno saznati sadržaj hranjivih tvari i cijenu za svaki McDonald's jelovnik. Nakon toga se tehnikom cjelobrojnog linearnog programiranja pretraživao jelovnik s minimalnim troškovima pri čemu zadovoljavajući kalorijski unos osobe nije smio prelaziti 2500 kcal po danu odnosno 2200 kcal po danu, a matematički model problema formuliran je tako da ukupni trošak za predloženi jelovnik predstavlja funkciju cilja. Ograničenja koja su uključena su količine kalorija, ugljikohidrata, proteina, masti, soli i šećera. Problem se rješavao korištenjem alata Solver u MS Excelu. Rezultati koji su dobiveni su sljedeći: za prehranu 1 kojoj je limit bio 2500 kalorija minimalni troškovi su iznosili RM 57.25 s prijedlogom jelovnika koji se sastojao od jednog menija Filet-o-Fish i pet menija Hotcakes (2 komada) za jednu osobu dnevno, za prehranu 2 kojoj je limit bio 2200 kalorija iznos minimalnih troškova je ponovno bio RM 57.25 s prijedlogom jelovnika koji je bio isti kao i kod prethodnog slučaja. Budući da se obje prehrane sastoje od istog jelovnika, dobivena količina kalorija u oba slučaja je 1470 kcal (Mohamed i sur., 2021).

Konačno, ovo potpoglavlje će se zaključiti svojevrsnim pregledom upotrebe linearnog programiranja za optimizaciju prehrane, gledano nutricionistički, ekonomski i ekološki, što je ujedno bila tema kojom se bavio autor C. Van Dooren u elektroničkom časopisu „Granice u prehrani“. Problem prehrane karakterizira duga povijest dok je većina rješenja za usporedive probleme razvijena 2000. godine ili kasnije, tijekom čega su računala s velikim proračunskim kapacitetima postala široko dostupna i razvijeni su alati za linearno programiranje. Na temelju odabrane literature od 52 rada koji su proučavani u članku, linearno programiranje se može primijeniti na različite probleme prehrane, od pomoći u hrani, nacionalnih prehrambenih programa i prehrambenih smjernica do pojedinačnih problema. Većina studija koristila je prehrambena ograničenja i troškovna ograničenja u analizi problema prehrane, ali takva istraživanja počinju pokazivati slabosti u situacijama s malim brojem prehrambenih artikala i/ili prehrambenih ograničenja. Samo 12 studija primijenilo je i uvelo ekološka ograničenja, a od njih su samo dvije uključile i ograničenja troškova. Ta su istraživanja pokazala da se utjecaj prehrane na okoliš može prepoloviti, ostajući unutar postojećih prehrambenih ograničenja. Preporuča se uvođenje ograničenja prihvatljivosti, ali niti jedna studija nije pružila konačno rješenje za izračun prihvatljivosti. Buduće mogućnosti leže u pronalaženju rješenja linearnog programiranja za dijetu kombiniranjem nutritivnih, troškovnih, ekoloških i prihvatljivih ograničenja. Linearno programiranje je važan alat za optimizaciju glede održivosti okoliša i pokazuje značajan potencijal kao instrument za pronalaženje rješenja za niz vrlo složenih problema prehrane (Van Dooren, 2018). Ono se može promatrati kao dio velikog revolucionarnog razvoja koji je čovječanstvu dao sposobnost da postavi opće ciljeve i postavi put detaljnih odluka koje treba poduzeti kako bi najbolje postigao svoje ciljeve kada se suoči s praktičnim situacijama velike složenosti (Dantzig, 2002).

4. RJEŠAVANJE PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

4.1.Rješavanje pomoću simpleks metode

Poznato je da su prije 1947. godine objavljena četiri izolirana rada o posebnim slučajevima problema linearnog programiranja: radovi Fouriera (1824.), de la Vallee Poussina (1911.), Kantorovicha (1939.) i Hitchcocka (1941.). Svi osim Kantorovicheva rada predlažu kao metodu rješavanja spuštanje duž vanjskih bridova poliedarskog skupa, što je način na koji danas opisujemo simpleks metodu (Dantzig, 1990). Simpleks metoda jedna je od najpoznatijih metoda za rješavanje problema linearnog programiranja, a autor simpleks metode George Bernard Dantzig veliki dio zasluga za temeljne ideje pripisuje J. von Neumanu. Iako je prve ideje razvio već 1947. godine, osnovni rad o toj metodi objavljen je 1951. u knjizi T. C. Koopmansa „Activity analysis of production and allocation". Naziv simpleks dolazi od toga što je jedan od prvih primjera riješen na jediničnom trokutu, koji je konveksna ljuska skupa od tri točke iz prostora R^2, a to je dvodimenzionalni simpleks. Simpleks metoda je iterativna metoda, što znači da se radi o metodi kojom se svakim korakom poboljšava rješenje. Algoritam simpleks metode se dijeli na četiri dijela:

1) Konstruira se neko inicijalno moguće rješenje
2) Primjenjuje se test tako da se odredi je li to optimalno rješenje
3) Ako rješenje nije optimalno, metoda daje uputu kako doći do boljega rješenja
4) Nakon konačno mnogo koraka dolazi se do optimalnog rješenja ili se utvrđuje da ono ne postoji (Babić 2005, str. 121)

Kako će se u nastavku spominjati pojmovi matrice i vektora, ukratko će se ponoviti nešto o njima. Broj redaka i stupaca u matrici zajedno definiraju red matrice. Ako se matrica A sastoji od m redaka i n stupaca, tada se kaže da je ona reda $m \times n$. Broj redaka uvijek prethodi broju stupaca, a u posebnom slučaju kada je $m = n$, matrica se naziva kvadratnom. Neke matrice mogu sadržavati samo jedan stupac pa se takve zovu vektori stupci. Naravno, ako matrica ima samo jedan redak, to se onda zove vektorom retkom te se radi obilježavanja, vektor redak razlikuje od vektora stupca na način da se za vektor redak upotrebljava simbol s crticom, na primjer $x' = [x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n]$ (Chiang 1994, str. 57). Simpleks se metoda radi samo s kanonskim problemom. Poznato je kako se svaki standardni problem može prevesti u ekvivalentan kanonski problem, odnosno rješavanjem kanonskog problema dobiva se i rješenje standardnog problema, a simpleks metoda funkcionira samo s baričnim rješenjima tog kanonskog problema, što je posljedica osnovnog teorema linearnog programiranja koji glasi ovako: ako kod problema linearnog programiranja s matricom A formata (m, n), gdje je $m \leq n$ i $r(A) = m$, postoji moguće rješenje, tada postoji i bazično moguće rješenje. Ako uz to taj problem ima i optimalno rješenje, tada ima i bazično optimalno rješenje. Zbog ovoga teorema, dovoljno je ispitati samo bazična rješenja kanonskog problema, a njih će uvijek biti konačno mnogo, to jest najviše $\binom{n}{m}$. Kanonski problem maksimuma linearnog programiranja ima sljedeći oblik:

a) $\max C^T X$
b) $AX = A_0$
c) $X \geq 0$,

gdje je matrica A formata (m, n), a X vektor varijabli formata (n, 1). Ako se označe vektori stupci matrice A s A_j $(j = 1, 2, \dots, n)$, ograničenje pod b) se može zapisati i kao $A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n = A_0$, tada su vektori $A_j \in E^m$, a posebno je i vektor desne strane ograničenja $A_0 \in E^m$. Rješavanje tog sustava jednadžbi je ekvivalentno s tim da se vektor A_0 izrazi kao linearna kombinacija vektora A_j, a određivanje bazičnog rješenja sustava ekvivalentno je s tim da se vektor A_0 izrazi kao linearna kombinacija vektora baze. Maksimalan broj mogućih baza, sastavljen od n vektora A_j, odgovara $\binom{n}{m}$ pa je tako i maksimalan mogući broj bazičnih rješenja konačan. Ako se pretpostavi da postoji jedno bazično moguće rješenje i da bazu tvori prvih m vektora A_j, svaki od n vektora (bazičnih i nebazičnih) može se na jedinstven način izraziti pomoću vektora baze kao $A_j = \sum_{i=1}^{m} t_{ij}A_i\,, j = 1, 2, \dots, n$. Posebno za vektor A_0 vrijedi $A_0 = \sum_{i=1}^{m} t_{i0}A_i$. Razlog zašto se spominje baš taj vektor je zato što se upravo dobilo jedno bazično rješenje sustava linearnih jednadžbi dobivenih od ograničenja napisanih pod b). Nadalje, definirat će se veličine z_j i z_0 na način da je $z_j = \sum_{i=1}^{m} t_{ij}c_i\,, j = 1, 2, \dots, n$ te $z_0 = \sum_{i=1}^{m} t_{i0}c_i$. Kako su t_{i0} ustvari komponente prvog bazičnog rješenja $(t_{i0} = x_i)$, relacija z_0 u kojoj se varijable x_i množe s koeficijentima c_i iz funkcije cilja predstavlja vrijednost funkcije cilja za to bazično moguće rješenje. Drugim riječima, ako je početno bazično rješenje vektor $X_0 = [t_{10} \;\; t_{20} \;\; \dots \;\; t_{m0} \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0]^T$, a vektor koeficijenata iz funkcije cilja je $C^T = [c_1 \;\; c_2 \;\; \dots \;\; c_n]$, onda vrijedi $z_0 = C^T X_0$. Kako bi se riješio ovaj problem linearnog programiranja, potrebno je povećati vrijednost funkcije cilja, to jest dobiti neko drugo rješenje kod kojeg će vrijediti $z > z_0$, osim ako to već nije optimalno rješenje, a tu pomaže drugi teorem koji kaže da se, u slučaju kada je za neki j $c_j > z_j$ $(z_j - c_j < 0)$, može konstruirati jedan skup mogućih rješenja tako da za svaki član tog skupa vrijedi $z > z_0$, gdje je gornja granica od z konačna ili beskonačna.

Drukčije sročeno, tvrdi se da dokle god je prisutan neki vektor A_j iz danog problema linearnog programiranja za kojega je vrijednost odgovarajućeg koeficijenta iz funkcije cilja c_j veća od izraza z_j, moguće je pronaći neka druga rješenja koja su bolja od postojećega. Pri tome gornja granica od z može biti i beskonačno velika, odnosno može se dogoditi da dani problem nema optimalno rješenje (Babić 2005, str. 124). Uglavnom, postupak simpleks procedure za problem maksimuma se može sistematizirati ovako:

1) Određuje se jedno bazično moguće rješenje problema linearnog programiranja
2) Rješenje se testira računajući izraze $(c_j - z_j)$, odnosno $(z_j - c_j)$
3) Ako je $(z_j - c_j) \geq 0, \forall j, j = 1, 2, \dots, n$, dano rješenje je optimalno
4) Ako postoji neki A_j za kojega je $(z_j - c_j) < 0$, vrijednost funkcije cilja može biti povećana uvođenjem tog vektora u bazu
5) U bazu se uvodi vektor A_s za kojega vrijedi $(c_s - z_s) = max_j(c_j - z_j)$, odnosno $|z_s - c_s| = max_j|z_j - c_j|, z_j - c_j < 0$ (odabire se takav j za kojega izraz poprima maksimalnu vrijednost)
6) Iz baze izlazi vektor A_r za kojega je minimalan kvocijent iz relacije $\frac{t_{r0}}{t_{rj}} = min_i \frac{t_{i0}}{t_{ij}}, t_{ij} > 0$, što osigurava da novo rješenje bude bazično i moguće. Ako taj minimum nije jedinstven, dobiveno rješenje je degenerirano.
7) Postupak završava kada su svi $(z_j - c_j) \geq 0$ ako je rješenje optimalno ili kada je $t_{ij} \leq 0, \forall i$ te neki fiksni j što znači da nema optimalnoga rješenja
8) U slučaju kada je $(z_j - c_j) = 0$ za neki vektor A_j koji nije u bazi, onda postoji i alternativno optimalno rješenje

Kod rješavanja problema minimuma razlika je u tome što se u novu bazu uvodi vektor za kojega je $(z_j - c_j) > 0$, a optimalno rješenje se dobiva u situaciji kada su sve razlike $(z_j - c_j) \leq 0$ (Babić 2005, str. 130). Općenito, primjene ovakvih linearnih programa su tipične u područjima industrijske proizvodnje, transporta, energetike, poljoprivrede, strojarstva, ekologije i mnogim drugima. Primjerice, za koeficijente u funkciji cilja se može uzeti da predstavljaju cijene proizvodnih inputa, koeficijenti u ograničenjima bi se mogli odnositi na produktivnost faktora proizvodnje dok bi s desne strane jednadžbe bili kapaciteti skladišta ili potražnja za proizvodima ili nešto treće. Pretpostavlja se da oni imaju poznate fiksne, stvarne vrijednosti te ostaje zadatak pronaći optimalnu kombinaciju vrijednosti za varijable odluke (faktore proizvodnje) koje moraju zadovoljiti zadana ograničenja (Kall i Wallace 1994, str. 1).

Postoji pojam dvofazne simpleks metode i on će biti važan element u rješavanju problema prehrane kojim se bavi ovaj rad zbog same prirode problema. U slučajevima kada je početno rješenje moguće, primjenjuje se simpleks metoda koja je prethodno opisana, ali postavlja se pitanje što napraviti u situaciji kada početno rješenje problema nije moguće. Dvofazna simpleks metoda je, kako sam naziv govori, simpleks metoda koja se dijeli na dvije faze. U prvoj se fazi traži jedno moguće rješenje dok se u drugoj primjenjuje postupak nalaženja optimalnog rješenja počevši od prethodno nađenog mogućeg rješenja. Kompletni algoritam za rješavanje problema linearnog programiranja u standardnom obliku koji zahtjeva korištenje dvofazne simpleks metode se može sumirati na sljedeći način:

- Faza 1:
    1) Množenjem nekih od ograničenja s -1, potrebno je promijeniti problem tako da vrijedi $b \geq 0$
    2) Uvesti umjetne varijable $y_1, y_2, \dots, y_m$ ako je potrebno i primijeniti simpleks metodu na pomoćni problem s troškom $\sum_{i=1}^{m} y_i$
    3) Ako je optimalni trošak u pomoćnom problemu pozitivan, originalni problem je nerješiv i algoritam tu završava
    4) Ako je optimalni trošak pomoćnog problema jednak nuli, nađeno je dopustivo rješenje originalnog problema. Ako nema nijedne umjetne varijable u finalnoj bazi, umjetne varijable i odgovarajući stupci su eliminirani te se može naći dopustiva baza za originalni problem
    5) Ako je l-ta bazična varijabla umjetna, treba se proučiti l-to mjesto u stupcima $B^{-1}A_j, j = 1, 2, \dots, n.$ Ako su sva mjesta nula, l-ti redak predstavlja suvišno ograničenje i ono se miče. U suprotnom, ako l-to mjesto u j-tom stupcu nije nula, baza se mora mijenjati, koristeći ovo mjesto kao pivot element: l-ta bazična varijabla izlazi i x_j ulazi u bazu. Ovaj se postupak ponavlja sve dok sve umjetne varijable ne izađu iz baze
- Faza 2:
    1) Neka finalna baza i tablica iz faze 1 budu inicijalna baza i tablica za fazu 2
    2) Potrebno je izračunati reducirane troškove svih varijabli za ovu inicijalnu bazu koristeći koeficijente troškova originalnog problema
    3) Primjenjuje se simpleks metoda na originalni problem

Navedeni dvofazni algoritam je kompletan u smislu da vodi računa o svim mogućim ishodima problema. Sve dok se kruženje u rješavanju izbjegava, bilo zbog nedegeneracije, Blandovog pravila ili sreće, doći će do jedne od sljedećih mogućnosti:

1) U slučaju da je problem nerješiv, to se uočava krajem faze 1
2) Ako je problem rješiv, ali redovi matrice A su linearno zavisni, to će se uočiti i ispraviti krajem faze 1 eliminiranjem suvišnih ograničenja jednakosti
3) U situaciji kada je optimalni trošak jednak $-\infty$, to se uočava tijekom faze 2
4) Inače, faza 2 završava s optimalnim rješenjem (Bertsimas i Tsitsiklis 1997, str. 117)

Dodatno, postoji novi pristup rješavanja ovakvih problema zvan brza simpleks metoda. Riječ je o metodi koja može biti korištena tijekom rješavanja problema dvofaznom simpleks metodom, neovisno o tome radi li se o prvoj ili drugoj fazi. Ovakav način rješavanja katkad uključuje manje iteracija od simpleks metode ili najviše jednak broj jer se pokušava zamijeniti više od jedne bazične varijable istovremeno. Poznato je da je konvencionalna simpleks metoda poprilično nezgodna u rješavanju problema degeneracije i kruženja zbog toga što izbor ulaznih i izlaznih vektora igra važnu ulogu. Degeneracija se događa kada postoji situacija u kojoj je svejedno koji će vektor biti izlazni. Mogućnost kruženja ključna je samo ako trenutno bazično izvedivo rješenje ima više od jedne varijable koje su nula. Kada dođe do izjednačenja po pitanju izbora vektora u simpleks metodi, odabire se vektor s najnižim indeksom j. U ovom novom pristupu riješen je problem izjednačenja u većini slučajeva degeneracije. Upravo je to prednost brze simpleks metode te je zbog toga u tim situacijama ova tehnika sigurno praktičnija (Vaidya i Kasturiwale, 2016).

4.2.Dualnost u linearnom programiranju

Teorija dualnosti se može shvatiti kao proširenje metode Lagrangeovog množenja koja se često koristi u računici za minimiziranje funkcije podložne ograničenjima jednakosti. Na primjer, kako bi se riješio idući problem

$$\min x^2 + y^2$$

$$x + y = 1,$$

uvodi se Lagrangeov multiplikator p i tako se formira Lagrangeova funkcija $L(x, y, p)$ koja je definirana kao $L(x, y, p) = x^2 + y^2 + p(1 - x - y)$. Fiksiranjem vrijednosti varijable p, minimizira se Lagrangeova funkcija za sve vrijednosti x i y, bez ograničenja, što se može napraviti postavljanjem derivacije funkcije po varijabli x i derivacije funkcije po varijabli y na nulu. Optimalno rješenje ovog problema je $x = y = \frac{p}{2}$ i ono ovisi o p. Ograničenje $x + y = 1$ potvrđuje da je $p = 1$ pa je optimalno rješenje početnog problema $x = y = \frac{1}{2}$. Smisao ovog primjera je bio da se pokaže kako je optimalno rješenje problema s ograničenjima ujedno i optimalno rješenje problema koji nema ograničenja ako je varijabla p ispravno odabrana. Slična je situacija u linearnom programiranju: svakom se ograničenju pridružuje varijabla cijene i počinju se tražiti cijene pod kojima prisutnost ili odsutnost ograničenja ne utječe na optimalni trošak. Ispostavilo se da se prave cijene mogu naći rješavanjem novog problema linearnog programiranja koji se naziva dual originala. Neka je matrica A matrica koja se sastoji od redaka a'_i i stupaca A_j. Primal je tada prikazan na lijevoj strani dok se odgovarajući dual nalazi na desnoj:

$\min c'x$	$\max p'b$
$a'_i x \geq b_i, i \in M_1$	$p_i \geq 0, i \in M_1$
$a'_i x \leq b_i, i \in M_2$	$p_i \leq 0, i \in M_2$
$a'_i x = b_i, i \in M_3$	$p_i\ slobodan, i \in M_3$
$x_j \geq 0, j \in N_1$	$p'A_j \leq c_j, j \in N_1$
$x_j \leq 0, j \in N_2$	$p'A_j \geq c_j, j \in N_2$
$x_j\ slobodan, j \in N_3$	$p'A_j = c_j, j \in N_3$

Ono što se primjećuje je da za svako ograničenje u primalu postoji određena varijabla u dualu, odnosno za svaku varijablu u primalu postoji pripadajuće ograničenje u dualu. Ovisno o tome je li primalno ograničenje ograničenje jednakosti ili nejednakosti, odgovarajuća dualna varijabla je ili slobodna ili ograničena predznakom. Naravno, ako postoji varijabla u primalnom problemu koja je slobodna ili predznakom ograničena, bit će prisutno ograničenje jednakosti ili nejednakosti u dualnom problemu (Bertsimas i Tsitsiklis 1997, str. 143). Ovi odnosi su prikazani dolje u tablici.

Tablica 2: Odnosi primalnih i dualnih varijabli i ograničenja

Primal	**Min**	**max**	**Dual**
ograničenja	$\geq b_i$ $\leq b_i$ $= b_i$	≥ 0 ≤ 0 slobodan	varijable

varijable	≥ 0 ≤ 0 Slobodan	$\leq c_j$ $\geq c_j$ $= c_j$	ograničenja

Izvor: Bertsimas, D. i Tsitsiklis, J. N. (1997.), *Introduction to Linear Optimization*, Belmont, MA: Athena Scientific

Princip dualnosti kaže da ako dualni ili primalni problem ima rješenje, onda ga ima i onaj drugi. Štoviše, minimalna vrijednost primala odgovara maksimalnoj vrijednosti duala (Anton, Kolman i Averbach 1988, str. 224). Ovo je poznato i kao teorem jake dualnosti. Neka su zadani linearni program P i njegov odgovarajući dual D. Dakle, ako P i D imaju rješenja, onda svaki od njih ima optimalno rješenje pa bi zapisano simbolima to izgledalo ovako:

$$P° = \min(P) = \max(D) = D°,$$

gdje $P°$ i $D°$ označavaju optimalne vrijednosti funkcije cilja primala i duala. Nadalje, ako jedan od njih ima neograničeni optimum, onda drugi nema rješenje (Minoux 1986, str. 49). Postoji još par teorema vezanih za dualnost u linearnom programiranju na koje bi valjalo obratiti pozornost. Prvi teorem kaže da ako se dual transformira u ekvivalentni problem minimizacije i zatim se formira njegov dual, dobit će se problem ekvivalentan izvornom problemu. Jednostavnije rečeno, dual duala je primal. Teorem slabe dualnosti nalaže da ako je x moguće rješenje primalnog problema i p je moguće rješenje dualnog problema, vrijedi $p'b \leq c'x$. Posljednji teorem o kojem će biti riječi je teorem oslabljene komplementarnosti. Postoji važna veza među optimalnim rješenjima primala i duala i o tome upravo govori ovaj teorem. Neka su x i p izvediva rješenja primala i duala. Vektori x i p su optimalna rješenja svojih odgovarajućih problema ako i samo ako vrijedi sljedeće:

$$p_i(a'_i x - b_i) = 0, \forall i,$$

$$\left(c_j - p'A_j\right)x_j = 0, \forall j$$ (Bertsimas i Tsitsiklis 1997, str. 151).

4.3.Analiza osjetljivosti u linearnom programiranju

Zadan je standardni oblik problema s lijeve strane i njegov dual s desne strane:

$\min c'x$	$\max p'b$
$Ax = b$	$p'A \leq c'$
$x \geq 0$	

U ovom dijelu rada proučavat će se ovisnost optimalnog troška i optimalnog rješenja o matrici koeficijenata A, vektoru zahtjeva b i vektoru troška c. Ovo je inače važno pitanje u praksi jer je često prisutna situacija u kojoj nije potpuno znanje o podacima o problemu, a donositelji odluke žele predvidjeti učinke određenih promjena parametara. Kako bi se pojednostavio prikaz objašnjenja analize osjetljivosti, stalna pretpostavka će biti da se radi o problemu standardnog oblika i da su redovi $m \times n$ matrice A linearno neovisni. Nadalje, pretpostavit će se da već postoji optimalna baza B i optimalno rješenje $x°$. Neka od vrijednosti A, b ili c će se mijenjati, dodat će se novo ograničenje ili će nova varijabla biti dodana pa će se tako promatrati promjene na problemu, ali će se prvo proučiti pod kojim je uvjetima trenutačna baza još uvijek optimalna. Ako su ovi uvjeti prekršeni, traži se algoritam koji pronalazi novo optimalno rješenje bez rješavanja novog problema ispočetka. Kako se pretpostavilo da je B optimalna baza originalnog problema, vrijede ovi uvjeti:

$$B^{-1}b \geq 0 \text{ (izvedivost)}$$

$$c' - c'_B B^{-1} A \geq 0' \text{ (optimalnost)}$$

Kada se problem promjeni, provjerit će se kakav je utjecaj na ove uvjete. Inzistiranjem na tome da oba uvjeta (izvedivost i optimalnost) vrijede za modificirani problem, dobivamo uvjete pod kojima bazna matrica B ostaje optimalna za modificirani problem (Bertsimas i Tsitsiklis 1997, str. 203).

4.3.1. Slučaj kada se dodaje nova varijabla

Neka je uvedena nova varijabla x_{n+1} zajedno s odgovarajućim stupcem A_{n+1}, novi problem sada izgleda ovako:

$$\min c'x + c_{n+1}x_{n+1}$$

$$Ax + A_{n+1}x_{n+1} = b$$

$$x \geq 0, x_{n+1} \geq 0$$

Primjećuje se kako $(x, x_{n+1}) = (x°, 0)$ je bazično izvedivo rješenje novog problema povezano s bazom B i sada je potrebno analizirati uvjet optimalnosti. Kako bi baza B ostala optimalna, nužno je i dovoljno da vrijedi ovo:

$$\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - c'_B B^{-1} A_{n+1} \geq 0$$

Ako je ovaj uvjet zadovoljen, $(x°, 0)$ je optimalno rješenje novog problema. Međutim, ako vrijedi $\bar{c}_{n+1} \leq 0$, onda $(x°, 0)$ nije nužno optimalno. Kako bi se pronašlo optimalno rješenje, dodaje se stupac u simpleks tablicu, pridružen novoj varijabli, i primjenjuje se primalni simpleks algoritam počevši od trenutne baze B. Uobičajeno je da se optimalno rješenje novog problema dobiva s malim brojem ponavljanja te je ovaj pristup često brži od rješavanja novog problema ispočetka (Bertsimas i Tsitsiklis 1997, str. 203).

4.3.2. Slučaj kada se dodaje novo ograničenje nejednakosti

Neka je sada uvedeno novo ograničenje $a'_{m+1}x \geq b_{m+1}$, gdje su a_{m+1} i b_{m+1} zadani. Ako optimalno rješenje originalnog problema $x°$ zadovoljava ovo ograničenje, onda je ono ujedno i optimalno rješenje novog problema. U slučaju da je novo ograničenje prekršeno, uvodi se nenegativna labava varijabla x_{n+1} i prepisuje se novo ograničenje u obliku $a'_{m+1}x - x_{n+1} = b_{m+1}$. Dobiva se problem u standardnom obliku u kojem je matrica A zamijenjena s

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ a'_{m+1} & -1 \end{bmatrix}.$$

B je optimalna baza originalnog problema. Nova se baza formira na način da se odabiru originalne bazične varijable zajedno s x_{n+1}. Nova bazična matrica $\bar{B}$ je sljedećeg oblika

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ a' & -1 \end{bmatrix},$$

gdje vektor stupac a' sadrži komponente iz a'_{m+1} koje su povezane s originalnim bazičnim stupcima. Osnovno rješenje povezano s ovom bazom je $(x°, a'_{m+1}x° - b_{m+1})$ i ono je neizvedivo zbog pretpostavke da $x°$ krši novo ograničenje. Ono što se zamjećuje je da je nova inverzna bazična matrica lako dostupna jer je

$$\overline{B^{-1}} = \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ a'B^{-1} & -1 \end{bmatrix}.$$

Neka je c_B m-dimenzionalni vektor s troškovima iz bazičnih varijabla u originalnom problemu. Vektor sa smanjenim troškovima povezan s bazom $\bar{B}$ za novi problem je prikazan kao

$$[c' \;\; 0] - [c'_B \;\; 0] \begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ a'^{B^{-1}} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ a'_{m+1} & -1 \end{bmatrix} = [c' - c'_B B^{-1} A \;\; 0]$$

te je on nenegativan zbog optimalnosti baze B kod originalnog problema. Stoga je $\bar{B}$ dualna izvediva baza i sada je moguće primijeniti dualnu simpleks metodu na novi problem. Inicijalna simpleks tablica za novi problem se lako da izvesti (Bertsimas i Tsitsiklis 1997, str. 205).

4.3.3. Slučaj kada se dodaje novo ograničenje jednakosti

Optimalno rješenje x° krši novo ograničenje $a'_{m+1}x = b_{m+1}$. Dual novog problema izgleda ovako:

$$\max p'b + p_{m+1}b_{m+1}$$

$$[p' \;\; p_{m+1}] \;\; \begin{bmatrix} A \\ a'_{m+1} \end{bmatrix} \leq c',$$

gdje p_{m+1} označava dualnu varijablu povezanu s novim ograničenjem. Neka p° bude optimalno bazično izvedivo rješenje originalnog dualnog problema. Tada je $(p^\circ, 0)$ izvedivo rješenje novog dualnog problema. Neka m, koji je isti kao i originalni broj ograničenja, bude dimenzija od p. Kako je p° bazično izvedivo rješenje originalnog dualnog problema, m broj ograničenja u $(p^\circ)'A \leq c'$ su linearno nezavisni i aktivni. Uz pretpostavku $a'_{m+1}x^\circ > b_{m+1}$, može se prikazati pomoćni primalni problem

$$\min c'x + Mx_{n+1}$$

$$Ax = b$$

$$a'_{m+1}x - x_{n+1} = b_{m+1}$$

$$x \geq 0, x_{n+1} \geq 0$$

gdje je M velika pozitivna konstanta. Primalna izvediva baza pomoćnog problema se dobije tako što se uzimaju bazične varijable optimalnog rješenja originalnog problema zajedno s varijablom x_{n+1}. Matrica baze koja nastaje je ista kao matrica $\bar{B}$ iz prethodnog slučaja, ali postoji razlika. Prethodni $\bar{B}$ je bio dualna izvediva baza dok je ovdje $\bar{B}$ primalna izvediva baza. Iz ovoga se razloga primalna simpleks metoda sada može koristiti kako bi se riješio pomoćni problem. Optimalno će rješenje pomoćnog problema zadovoljavati $x_{n+1} = 0$ ako je novi problem izvediv i ako je koeficijent M dovoljno velik. Zatim će dodatno ograničenje $a'_{m+1}x = b_{m+1}$ biti zadovoljeno, što znači da je to optimalno rješenje novog problema (Bertsimas i Tsitsiklis 1997, str. 207).

4.3.4. Slučaj promjena u vektoru zahtjeva b

Neka se neka komponenta b_i vektora zahtjeva b promjeni na vrijednost $b_i + \gamma$. Posljedično, vektor b se mijenja u $b + \gamma e_i$, gdje e_i označava i-ti jedinični vektor. Cilj je odrediti raspon vrijednosti γ pod kojima trenutna baza ostaje optimalna. Uvjeti optimalnosti nisu pod utjecajem promjena u vektoru b pa se zato treba samo proučiti uvjet izvedivosti $B^{-1}(b + \gamma e_i) \geq 0$. Ako je $g = (\beta_{1i}, \beta_{2i}, \dots, \beta_{mi})$ i-ti stupac u B^{-1}, uvjet izvedivosti postaje $x_B + \gamma g \geq 0$ ili $x_{B(j)} + \gamma\beta_{ji} \geq 0, j = 1, 2, \dots, m$. Posljedično vrijedi

$$\underset{\{j|\beta_{ji} > 0\}}{max}\left(-\frac{x_{B(j)}}{\beta_{ji}}\right) \leq \delta \leq \underset{\{j|\beta_{ji} < 0\}}{min}\left(-\frac{x_{B(j)}}{\beta_{ji}}\right).$$

Za γ u ovom rasponu, optimalni trošak kao funkcija tog γ je prikazan kao $c'_B B^{-1}(b + \gamma e_i) = p'b + \beta p_i$, gdje je $p' = c'_B B^{-1}$ optimalno dualno rješenje povezano s trenutačnom bazom B. Ako je γ izvan dozvoljenog raspona, trenutno rješenje zadovoljava uvjete optimalnosti (ili dualne izvedivosti), ali je primalno neizvedivo. U tom slučaju, primjenjuje se dualni simpleks algoritam počevši od trenutne baze (Bertsimas i Tsitsiklis 1997, str. 208).

4.3.5. Slučaj promjena u vektoru troška c

Pretpostavljeno je da se neki koeficijent troška c_j promjeni na vrijednost $c_j + \gamma$. Na primalni uvjet izvedivosti to nema utjecaja. Fokus je zato samo na uvjet optimalnosti

$$c'_B B^{-1} A \leq c'.$$

Ako je c_j koeficijent troška nebazične varijable x_j, onda se c_B ne mijenja i jedina nejednakost na koju postoji utjecaj je ona za smanjeni trošak od x_j. Nejednakost koja je sada prisutna je sljedeća

$$c'_B B^{-1} A_j \leq c_j + \gamma,$$

odnosno $\gamma \geq -\overline{c_j}$. Ako ovaj uvjet vrijedi, optimalna baza ostaje ista. Inače, primjenjuje se primalna simpleks metoda počevši od trenutačnoga baričnog izvedivog rješenja. Ako je c_j koeficijent troška od l-te bazične varijable, to jest ako je $j = B(l)$, tada c_B postaje $c_B + \gamma e_l$ i to će utjecati na sve uvjete optimalnosti. Uvjeti optimalnosti za novi problem je ovakav:

$$(c_B + \gamma e_l)'^{B^{-1}A_i} \leq c_i, \forall i \neq j.$$

Kako je x_j bazična varijabla, njegov reducirani trošak ostaje na nuli pa se ne treba dalje proučavati. Posljedično vrijedi

$$\gamma q_{li} \leq \overline{c_i}, \forall i \neq j,$$

gdje q_{li} označava l-ti ulaz od $B^{-1}A_i$ koji se može dobiti preko simpleks tablice. Ove nejednakosti određuju raspon γ za koji ista baza ostaje optimalna (Bertsimas i Tsitsiklis 1997, str. 209).

4.3.6. Slučaj promjena u nebazičnom stupcu matrice A

Pretpostavlja se da je neka vrijednost a_{ij} u j-tom stupcu A_j matrice A promijenjena na $a_{ij} + \gamma$. Cilj je odrediti raspon vrijednosti γ za koji je stara optimalna baza i dalje optimalna. Ako je stupac A_{ij} nebazičan, bazična matrica B se ne mijenja i na primalni uvjet izvedivosti to nema utjecaja. Nadalje, utjecaj postoji samo na smanjeni trošak j-tog stupca, što dovodi do uvjeta $c_j - p'(A_j + \gamma e_i) \geq 0$, odnosno $\overline{c_j} - \gamma p_i \geq 0$, gdje vrijedi da je $p' = c'_B B^{-1}$. Ako je ovaj uvjet prekršen, nebazični stupac A_j se može dovesti u bazu te se nastavlja s primalnom simpleks metodom (Bertsimas i Tsitsiklis 1997, str. 209).

4.3.7. Slučaj promjena u bazičnom stupcu matrice A

Ako se jedna od vrijednosti kod bazičnog stupca A_j promjeni, onda to ima utjecaja i na uvjet optimalnosti i na uvjet izvedivosti. Pretpostavljeno je da se bazični stupac A_j promijenio na $A_j + \gamma e_i$, gdje e_i predstavlja i-ti jedinični vektor. Također, pretpostavlja se da originalni problem i njegov dual imaju jedinstvena i nedegenerirana optimalna rješenja $x°$ i p. Neka je $x°(\gamma)$ optimalno rješenje modificiranog problema kao funkcija γ. Za male vrijednosti γ vrijedi sljedeće:

$$c'x°(\gamma) = c'x° - \gamma x°_j p_i + O(\gamma^2).$$

Kako bi se interpretirala ova jednadžba, poslužit će primjer problema prehrane prema kojemu a_{ij} odgovara količini i-te hranjive tvari u j-toj hrani. Uz dano optimalno rješenje $x°$ originalnog problema, povećanje a_{ij} za γ znači da se dobiva dodatna količina $\gamma x°_j$ i-te hranjive tvari „besplatno“. Budući da je dualna varijabla p_i marginalni trošak po jedinici i-te hranjive tvari, besplatno se dobiva nešto što inače vrijedi $\gamma p_i x°_j$ i to dopušta smanjenje troškova za taj isti iznos (Bertsimas i Tsitsiklis 1997, str. 210).

5. PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA NA PROBLEM PREHRANE STUDENTA

5.1.Analiza istraživačkog problema prehrane studenta

Ovaj dio rada se može smatrati svojevrsnim nastavkom na prethodni dio u trećem poglavlju koji je opisivao pretpostavke modela problema, a bavit će se analizom samog istraživačkog problema tako da će se opisivati postupak prikupljanja podataka, koji će se kasnije koristiti za računski dio problema. Uzevši u obzir prethodno rečene pretpostavke, nastojat će se kupiti proizvodi kojima se mogu složiti ne toliko komplicirana jela iz razloga što sami korisnici modela ne bi morali biti vrsni kuhari kako bi ih pripremili. Dodatno, za jednostavnija jela najčešće je potrebno manje vrijeme pripreme nego za složenija, što je prednost budući da studenti često nemaju toliko vremena na raspolaganju zbog ostalih obveza koje imaju. Kroz rad se spominjalo kako bi se htjela napraviti prehrana koja je zdrava, ali postavlja se pitanje što je zapravo zdrava prehrana. Postoji mnogo definicija, ali razmatrat će se ona koja se predložila na summitu Ujedinjenih naroda o prehrambenim sustavima 2021. godine. Ona glasi da je zdrava prehrana ona koja promiče zdravlje i sprječava bolesti, omogućuje dostatnu količinu, bez suviška, hranjivih tvari i tvari koje promiču zdravlje iz hranjivih namirnica te izbjegava konzumaciju tvari štetnih za zdravlje (Neufeld, Hendriks i Hugas, 2023). Iako se za neke namirnice smatra da su zdrava hrana, moguće je da neće biti u modelu problema prehrane iz razloga što zajedno s ostalim prehrambenim proizvodima ne zadovoljavaju određena ograničenja modela. Ne smije se zaboraviti da kod problema prehrane postoji mogućnost da problem nema rješenje pa se to mora na neki način izbjegavati. Sljedeće pitanje koje se postavlja je gdje kupovati namirnice jednom kada se sazna koje je potrebno kupiti. Svaki proizvod će se tražiti u jednom od četiri najvećih trgovačkih lanaca po pitanju prihoda, ovisno o tome u kojem od njih ima najnižu cijenu. Četiri vodeća trgovačka lanca u Hrvatskoj su trenutno Konzum plus, Lidl, Spar i Plodine. Bit će napravljena prehrana za tri dana, sva tri dana će imati različite obroke. Ovisno o tome kako zadovoljavaju ograničenja, u nekom danu može biti veći broj obroka nego u ostalima. U razdoblju od mjesec dana, spomenuta tri dana će se ponoviti određeni broj puta budući da se niz od ta tri dana ponavlja kada završi treći dan. Kada budu pronađene optimalne količine proizvoda, to jest one količine koje minimiziraju troškove, pogledat će se koliko puta se ponavljaju dani u mjesecu te će se toliko puta pomnožiti njihovi dnevni troškovi, što će zbrajanjem rezultirati ukupnim mjesečnim troškom za prehranu. Kako bi se model u konačnici pokazao izvedivim, mjesečni trošak će morati biti manji ili jednak budžetu namijenjenom za potrošnju na hranu, koji će prethodno biti izračunat.

5.2.Model prehrane studenta

Prilikom određivanja ograničenja, poslužilo je prethodno navedeno istraživanje „Primjena linearnog programiranja u problemu prehrane studenata". Uzevši to u obzir, ograničenja koja će se gledati u modelu su zadovoljavanje količina određenih hranjivih tvari, a one su masti, ugljikohidrati, proteini, kalcij i vitamin C te ukupan unos kalorija. Radi jednostavnosti i opsega rada, proučavat će se samo nabrojane hranjive tvari. Načelno, obroci u danu se dijele na doručak, ručak i večeru, ali kako postoji mogućnost da ljudi ne jedu pojedine obroke u istom dijelu dana svaki dan, odnosno mogućnost da nekad jedu doručak ili neki drugi obrok kasnije ili ranije, model je zamišljen tako da postoje odabrana jela koja pojedinac treba konzumirati kako bi zadovoljio svoje potrebe za hranjivim tvarima, ali odluka o tome kada će koji obrok konzumirati ostaje na samom pojedincu. Drugim riječima, pojedinac može u teoriji konzumirati sve obroke ujutro pa će svejedno zadovoljiti svoje potrebe iako ostatak dana neće ništa jesti.

Prvi korak u stvaranju modela prehrane studenta je vidjeti koji su preporučeni dnevni unosi hranjivih tvari kod odrasle osobe. Inače, preporučeni dnevni unos (RDA) je prosječan dnevni unos hranjive tvari koji je dovoljan da zadovolji potrebe gotovo svih (97-98%) zdravih osoba (Definicija hrane, 2015). Kasnije je potrebno pronaći namirnice u kojima su zastupljene te hranjive tvari. Na Internetu se mogu pronaći podatci o tome koliko koja namirnica ima tražene hranjive tvari, ali točan broj će se očitati s deklaracija samih proizvoda. Isto tako, brojevi vezani za preporučeni dnevni unos često znaju biti prikazani u tablici na tim deklaracijama. Za prvi dan predloženi su sljedeći obroci:

1) Obrok 1: pahuljice s jogurtom (sastojci: zobene pahuljice, jogurt)
2) Obrok 2: piletina s rižom i brokulom (sastojci: pileća prsa, crveni luk, češnjak, maslinovo ulje, riža, brokula)
3) Obrok 3: voće (sastojci: grejp)

Drugi dan će imati ove obroke:

1) Obrok 1: čokoladni banana napitak s kikirikijem (sastojci: banana, maslac od kikirikija, kakao u prahu, lanene sjemenke, mlijeko)

2) Obrok 2: oslić s tikvicama i krumpirom (sastojci: file oslića, tikvice, krumpir, češnjak, maslinovo ulje)
3) Obrok 3: Popaj salata (sastojci: pileća prsa, avokado, maslinovo ulje, špinat)
4) Obrok 4: voće (sastojci: grejp)

Treći dan se sastoji od idućih obroka:

1) Obrok 1: tjestenina s tunom, maslinama i jajima (sastojci: tjestenina, tuna u konzervi, masline, pelati, maslinovo ulje, češnjak, jaja)
2) Obrok 2: voće (sastojci: grejp)

U slučaju da se proizvod kupuje po određenoj količini, a u jelu će se tražiti manja količina od kupljene, cijena koja će se uzimati u obzir će biti ona koja izražava vrijednost potrebne količine u jelu. Ostatak proizvoda će se koristiti za iduće dane koji će zahtijevati taj proizvod.

5.3.Rješavanje problema prehrane studenta i interpretacija rezultata

Obilaženjem prethodno navedenih trgovačkih lanaca, došlo se proizvoda koji su imali najniže cijene u tim prodavaonicama. Proizvodi sa svojim pripadajućim cijenama su prikazani dolje u tablicama.

Tablica 3: Proizvodi i njihove cijene

Proizvod	**Cijena/100g**	**Proizvod**	**Cijena/100g**	**Proizvod**	**Cijena/100g**
Zobene pahuljice	0.278€	Maslinovo ulje	0.799€	Maslac od kikirikija	1.426€
Jogurt	0.159€	Riža	0.172€	Kakao u prahu	0.995€
Pileća prsa	1.19€	Brokula	0.299€	Lanene sjemenke	0.295€
Crveni luk	0.525€	Grejp	0.179€	Mlijeko	0.102€
Češnjak	0.593€	Banana	0.144€	File oslića	1.114€

Izvor: izrada autora, 2023.

Tablica 4: Proizvodi i njihove cijene (nastavak)

Proizvod	**Cijena/100g**	**Proizvod**	**Cijena/100g**
Tikvice	0.159€	Kruh	0.396€
Krumpir	0.0995€	Tjestenina	0.169€
Avokado	0.384€	Tuna u konzervi	1.181€
Špinat	0.522€	Masline	0.593€
Jaja	0.25€*	Pelati	0.248€

*cijena jaja je izražena po komadu

Izvor: izrada autora, 2023.

U tablicama su ispisane cijene za 100 grama proizvoda jer su tablice s hranjivim vrijednostima na deklaracijama proizvoda prikazane u odnosu na 100 grama proizvoda. Idealan dnevni unos kalorija varira ovisno o starosti, metabolizmu i tjelesnoj aktivnosti, među ostalim. Generalno, preporučeni dnevni unos kalorija iznosi 2000 kalorija za žene i 2500 kalorija za muškarce (NHS, 2019). Treba napomenuti da se to odnosi na tjelesno aktivnije osobe, a ovaj model ne uzima nužno u obzir takav profil osobe tako da će se koristiti podatak da je preporučeni unos za prosječnu odraslu osobu 2000 kcal, podatak koji najčešće piše na samim deklaracijama proizvoda. Minimalna dnevna razina unosa vitamina C je 160 mg, a maksimalna dopuštena količina je 800 mg dok je preporučeni dnevni unos kalcija 800 mg, a maksimalna razina je 1500 mg (NN, 2013). Što se tiče masti kao hranjive tvari, one se dijele na nezasićene masne kiseline, zasićene masne kiseline i trans-masne kiseline. Za odrasle, raspon preporučenog dnevnog unosa masti je od 20% do 35% ukupnog dnevnog unosa energije, a to se dijeli na maksimalno 10% unosa energije kod zasićenih masnih kiselina i na ostatak koji odlazi na nezasićene i trans masne kiseline (FAO, 2010). Ostaje pitanje kolika je količina proteina i ugljikohidrata koju čovjek mora unositi dnevno u svoj organizam. Od 10% do 35% kalorija treba dolaziti od proteina, što znači ako je unos kalorija 2000, od 200 do 700 kalorija je iz proteina, a unos proteina je tada između 50 i 175 grama (Mayo Clinic Health System, 2022). S druge strane, od 45% do 65% ukupnog dnevnog unosa energije treba biti dobiveno iz ugljikohidrata, što predstavlja od 900 kcal do 1300 kcal, odnosno od 225 g do 325 g ugljikohidrata (Mayo Clinic, 2022).

Sljedeći je korak izračunati kolike su količine pojedinih hranjivih tvari i kalorija u svakom obroku u određenom danu. U receptima obroka se navodi kolika je količina proizvoda koja je potrebna za pripremu jela pa će se prema tim količina dobiti iznosi hranjivih tvari kod svakog pojedinog proizvoda i ti iznosi će se na kraju zbrojiti kako bi se dobio ukupan iznos hranjivih tvari u jelu. Dolje su prikazani podatci za svaki obrok po danima.

Prvi dan:

1) Obrok 1: pahuljice s jogurtom – 100 g zobenih pahuljica + 200 g jogurta (nutritivne vrijednosti ukupno: 500 kcal, 0 mg vitamina C, 420 mg kalcija, 9 g masti, 3 g zasićenih masti, 23 g proteina, 80 g ugljikohidrata)
2) Obrok 2: piletina s rižom i brokulom – 400 g pilećih prsa + 100 g crvenog luka + 6 g češnjaka + 50 g maslinovog ulja + 160 g riže + 600 g brokule (nutritivne vrijednosti ukupno: 1335 kcal, 550 mg vitamina C, 300 mg kalcija, 63 g masti, 10 g zasićenih masti, 112 g proteina, 100 g ugljikohidrata)
3) Obrok 3: voće – 250 g grejpa (nutritivne vrijednosti ukupno: 110 kcal, 78 mg vitamina C, 54 mg kalcija, 0 g masti, 0 g zasićenih masti, 2 g proteina, 26 g ugljikohidrata)

Drugi dan:

1) Obrok 1: čokoladni banana napitak s kikirikijem – 100 g banana + 20 g maslaca od kikirikija + 10 g kakaa u prahu + 20 g lanenih sjemenaka + 250 g mlijeka (nutritivne vrijednosti ukupno: 480 kcal, 9 mg vitamina C, 374 mg kalcija, 23 g masti, 6 g zasićenih masti, 19 g proteina, 55 g ugljikohidrata)
2) Obrok 2: oslić s tikvicama i krumpirom – 300 g fileta oslića + 300 g tikvica + 300 g krumpira + 6 g češnjaka + 30 g maslinovog ulja (nutritivne vrijednosti ukupno: 840 kcal, 95 mg vitamina C, 152 mg kalcija, 31 g masti, 4 g zasićenih masti, 72 g proteina, 74 g ugljikohidrata)
3) Obrok 3: Popaj salata – 200 g pilećih prsa + 200 g avokada + 30 g maslinovog ulja + 180 g špinata (nutritivne vrijednosti ukupno: 840 kcal, 84 mg vitamina C, 280 mg kalcija, 63 g masti, 9 g zasićenih masti, 57 g proteina, 24 g ugljikohidrata)
4) Obrok 4: voće – 250 g grejpa (nutritivne vrijednosti ukupno: 110 kcal, 78 mg vitamina C, 54 mg kalcija, 0 g masti, 0 g zasićenih masti, 2 g proteina, 26 g ugljikohidrata)

Treći dan:

1) Obrok 1: tjestenina s tunom, maslinama i jajima – 80 g tjestenine + 170 g tune u konzervi + 40 g maslina + 150 g pelata + 30 g maslinovog ulja + 6 g češnjaka + 6 jaja (nutritivne vrijednosti ukupno: 1280 kcal, 65 mg vitamina C, 271 mg kalcija, 67 g masti, 16 g zasićenih masti, 92 g proteina, 77 g ugljikohidrata)
2) Obrok 2: voće – 250 g grejpa (nutritivne vrijednosti ukupno: 110 kcal, 78 mg vitamina C, 54 mg kalcija, 0 g masti, 0 g zasićenih masti, 2 g proteina, 26 g ugljikohidrata)

Nakon što su ispisane nutritivne vrijednosti za svaki obrok po danima, potrebno je vidjeti koliko iznose cijene pojedinih obroka, koje će kasnije biti prikazane kao koeficijenti u funkciji cilja. Cijene su prikazane dolje u tablici.

Tablica 5: Tablica obroka s pripadajućim cijenama po danima

Prvi dan		**Drugi dan**		**Treći dan**	
Obrok 1	0.596€	Obrok 1	0.843€	Obrok 1	4.527€
Obrok 2	7.789€	Obrok 2	4.393€	Obrok 2	0.448€
Obrok 3	0.448€	Obrok 3	4.327€		
		Obrok 4	0.448€		

Izvor: izrada autora, 2023.

Sada se mogu napisati ograničenja i funkcija cilja modela problema prehrane. Prvo će biti prikazan model prehrane za prvi dan, gdje x označava obrok 1, y označava obrok 2 te z označava obrok 3.

$$\min C = 0.596x + 7.789y + 0.448z$$

$$500x + 1335y + 110z \geq 2000$$

$$550y + 78z \geq 160$$

$$550y + 78z \leq 800$$

$$420x + 300y + 54z \geq 800$$

$$420x + 300y + 54z \leq 1500$$

$$9x + 63y \geq 44$$

$$9x + 63y \leq 78$$

$$3x + 10y \leq 22$$

$$23x + 112y + 2z \geq 50$$

$$23x + 112y + 2z \leq 175$$

$$80x + 100y + 26z \geq 225$$

$$80x + 100y + 26z \leq 325$$

$$x, y, z \geq 0$$

Problem prehrane po svojoj je prirodi problem koji pri rješavanju zahtijeva korištenje dvofazne simpleks metode budući da početno bazično izvedivo rješenje nije lako dostupno. Kako bi se krenulo s korištenjem dvofazne simpleks metode, problem minimizacije se mora pretvoriti u problem maksimizacije na način da se svaki broj u funkciji cilja pomnoži s brojem -1. Ograničenja originalnog problema se ne mijenjaju. Optimalno rješenje ovog problema maksimizacije će također biti optimalno rješenje originalnog problema minimizacije. Sljedeće je potrebno postaviti problem u standardni oblik tako što sva ograničenja moraju biti prikazana u obliku manje od (≤). Model problema sada izgleda ovako:

$$\max C' = -0.596x - 7.789y - 0.448z$$

$$-500x - 1335y - 110z \leq -2000$$

$$-550y - 78z \leq -160$$

$$550y + 78z \leq 800$$

$$-420x - 300y - 54z \leq -800$$

$$420x + 300y + 54z \leq 1500$$

$$-9x - 63y \leq -44$$

$$9x + 63y \leq 78$$

$$3x + 10y \leq 22$$

$$-23x - 112y - 2z \leq -50$$

$$23x + 112y + 2z \leq 175$$

$$-80x - 100y - 26z \leq -225$$

$$80x + 100y + 26z \leq 325$$

$$x, y, z \geq 0$$

Sada se dodaje nova funkcija cilja i nova varijabla $-x_0$ svim ograničenjima te se sve nejednadžbe mijenjaju u jednadžbe.

$$\max C' = -0.596x - 7.789y - 0.448z$$

$$\max M = -x_0$$

$$-x_0 - 500x - 1335y - 110z + w_1 = -2000$$

$$-x_0 - 550y - 78z + w_2 = -160$$

$$-x_0 + 550y + 78z + w_3 = 800$$

$$-x_0 - 420x - 300y - 54z + w_4 = -800$$

$$-x_0 + 420x + 300y + 54z + w_5 = 1500$$

$$-x_0 - 9x - 63y + w_6 = -44$$

$$-x_0 + 9x + 63y + w_7 = 78$$

$$-x_0 + 3x + 10y + w_8 = 22$$

$$-x_0 - 23x - 112y - 2z + w_9 = -50$$

$$-x_0 + 23x + 112y + 2z + w_{10} = 175$$

$$-x_0 - 80x - 100y - 26z + w_{11} = -225$$

$$-x_0 + 80x + 100y + 26z + w_{12} = 325$$

$$x, y, z, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}, x_0 \geq 0$$

Nakon što se to obavilo, moguće je zapisati model u obliku rječnika.

$$\max C' = -0.596x - 7.789y - 0.448z$$

$$\max M = -x_0$$

$$w_1 = -2000 + x_0 + 500x + 1335y + 110z$$

$$w_2 = -160 + x_0 + 550y + 78z$$

$$w_3 = 800 + x_0 - 550y - 78z$$

$$w_4 = -800 + x_0 + 420x + 300y + 54z$$

$$w_5 = 1500 + x_0 - 420x - 300y - 54z$$

$$w_6 = -44 + x_0 + 9x + 63y$$

$$w_7 = 78 + x_0 - 9x - 63y$$

$$w_8 = 22 + x_0 - 3x - 10y$$

$$w_9 = -50 + x_0 + 23x + 112y + 2z$$

$$w_{10} = 175 + x_0 - 23x - 112y - 2z$$

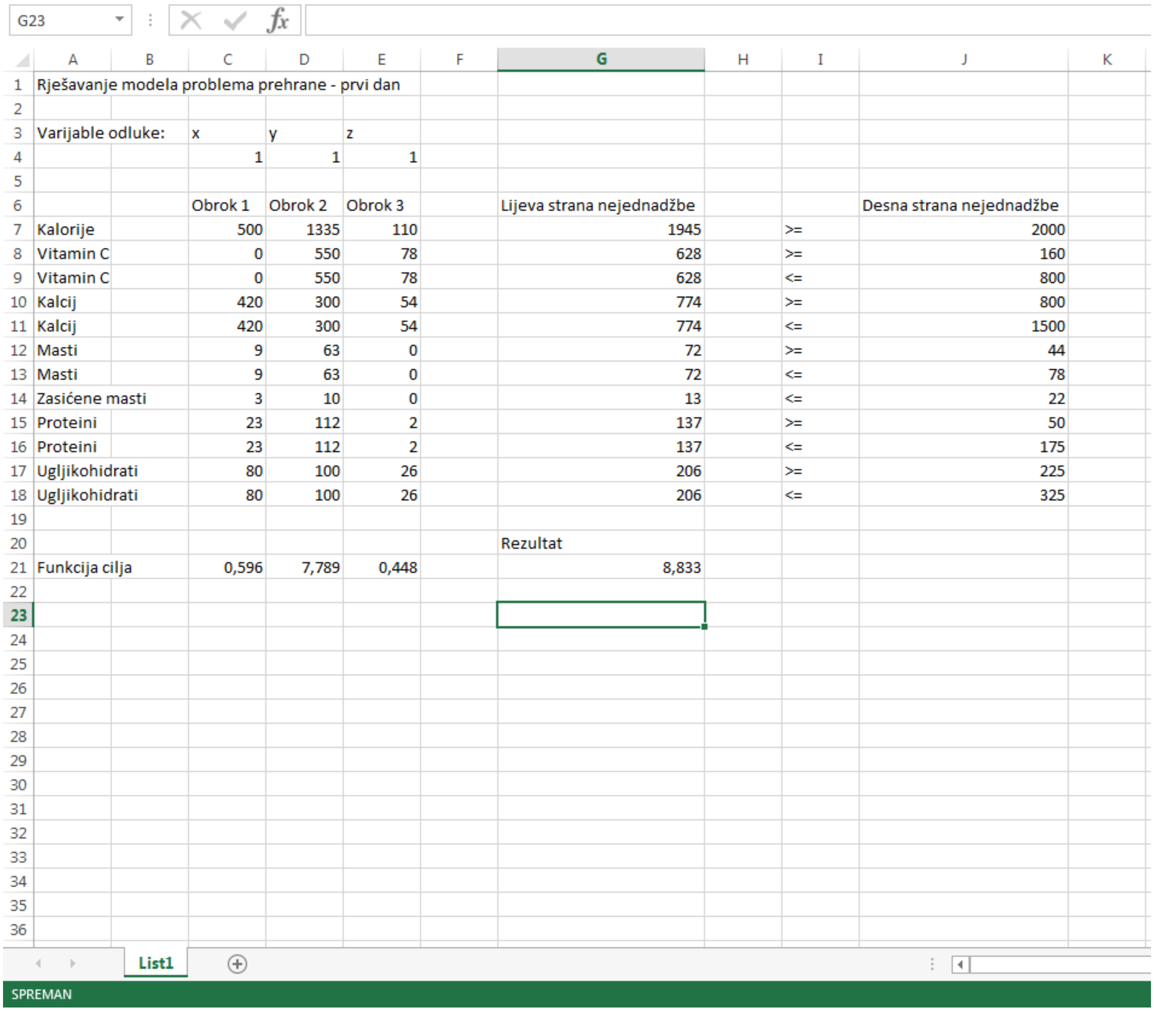
$$w_{11} = -225 + x_0 + 80x + 100y + 26z$$

$$w_{12} = 325 + x_0 - 80x - 100y - 26z$$

$$x, y, z, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}, x_0 \geq 0$$

Daljnji koraci u rješavanju problema uključuju izražavanje varijable x_0 te kasnije slično izražavanje drugih varijabli i mijenjanje ograničenja na način da se tako izražene varijable umetnu u jednadžbe, ali to bi bilo previše opsežno i komplicirano rješavati manualno jer model obuhvaća veliki broj varijabli. Iz tog će se razloga koristiti prethodno spomenuti alat Solver u Microsoft Excelu kako bi se riješili modeli problema prehrane za sva tri dana.

Slika 1: Model problema prehrane za prvi dan, početno stanje



	A	C	D	E	G	I	J
1	Rješavanje modela problema prehrane - prvi dan						
3	Varijable odluke:	x	y	z			
4		1	1	1			
6		Obrok 1	Obrok 2	Obrok 3	Lijeva strana nejednadžbe		Desna strana nejednadžbe
7	Kalorije	500	1335	110	1945	>=	2000
8	Vitamin C	0	550	78	628	>=	160
9	Vitamin C	0	550	78	628	<=	800
10	Kalcij	420	300	54	774	>=	800
11	Kalcij	420	300	54	774	<=	1500
12	Masti	9	63	0	72	>=	44
13	Masti	9	63	0	72	<=	78
14	Zasićene masti	3	10	0	13	<=	22
15	Proteini	23	112	2	137	>=	50
16	Proteini	23	112	2	137	<=	175
17	Ugljikohidrati	80	100	26	206	>=	225
18	Ugljikohidrati	80	100	26	206	<=	325
20					Rezultat		
21	Funkcija cilja	0,596	7,789	0,448	8,833		

Izvor: izrada autora, 2023.

Slika 2: Model problema prehrane za prvi dan, optimalno rješenje

G23 | f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Rješavanje modela problema prehrane - prvi dan										
2											
3	Varijable odluke:		x	y	z						
4			3,349970291	0,219845514	0,501089						
5											
6			Obrok 1	Obrok 2	Obrok 3		Lijeva strana nejednadžbe			Desna strana nejednadžbe	
7	Kalorije		500	1335	110		2023,598732		>=	2000	
8	Vitamin C		0	550	78		160		>=	160	
9	Vitamin C		0	550	78		160		<=	800	
10	Kalcij		420	300	54		1500		>=	800	
11	Kalcij		420	300	54		1500		<=	1500	
12	Masti		9	63	0		44		>=	44	
13	Masti		9	63	0		44		<=	78	
14	Zasićene masti		3	10	0		12,24836601		<=	22	
15	Proteini		23	112	2		102,6741929		>=	50	
16	Proteini		23	112	2		102,6741929		<=	175	
17	Ugljikohidrati		80	100	26		303,0104971		>=	225	
18	Ugljikohidrati		80	100	26		303,0104971		<=	325	
19											
20							Rezultat				
21	Funkcija cilja		0,596	7,789	0,448		3,933447019				
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											
31											
32											
33											
34											
35											
36											

Izvješće o odgovoru 1 | Izvješće o osjetljivosti 1 | Izvješće o granicama 1 | **List1**

SPREMAN

Izvor: izrada autora, 2023.

Na slici 1 se vidi početno stanje modela nakon što su napisani osnovni podatci modela u pripadajuće ćelije. Kod varijabli x, y i z su unesene jedinice kako bi određene ćelije poprimile neku vrijednost budući da te ćelije u sebi imaju formule koje zahtijevaju vrijednosti drugih ćelija, a ne zato kako bi model imao neko početno rješenje jer se vidi da model krši ograničenje vezano za kalorije i ugljikohidrate. Brojevi u retku 21, a ispod pojedinih obroka, označavaju koeficijente koji se nalaze kraj pripadajućih varijabli u funkciji cilja, oni su ujedno i cijene obroka. Nakon što su se unijeli podatci vezani za ograničenja i funkciju cilja u alat Solver, alat je pružio optimalno rješenje prikazano na slici 2. Brojevi ispod ćelija „Obrok 1“, „Obrok 2“ i „Obrok 3“ se nije mijenjali, no ćelije ispod ćelija „Lijeva strana nejednadžbe“ i „Rezultat“ su poprimile drugačije vrijednosti, kao i ćelije kod varijabli odluke. Ćelije od G7 do G18 prikazuju redom vrijednosti kalorija, vitamina C, kalcija, masti, zasićenih masti, proteina i ugljikohidrata u optimalnoj točki modela problema. Može se primijetiti kako se većina brojeva u tom stupcu duplicira, razlog tomu je što te ćelije zapravo imaju istu formulu u sebi, a bilo je neophodno ponavljati formule jer su ćelije morale biti unesene u Solver kako bi imale ulogu ograničenja. Ćelija G21 predočava vrijednost budžeta koji je potreban za ostvarivanje ovakve prehrane, a ona iznosi 3.93€ zaokruženo. Postavlja se pitanje što znače brojevi kod varijabli odluke u terminima obroka. Vrijednost 3,349970291 kod varijable x, odnosno obroka 1, znači da optimalna prehrana za prvi dan zahtjeva konzumiranje tri cijela obroka i još otprilike 35% obroka 1. Činjenica da prehrana zahtijeva 35% nekog obroka je isprve čudna, ali ona se može obrazložiti na način da se zamisli manji obrok koji se sastoji od istih namirnica, ali u manjim količinama. U ovom je slučaju količina zobenih pahuljica ne 100 grama, nego 35 grama, a količina jogurta je onda 70 grama. Smanjenjem mase pojedinih proizvoda u obrocima reducirat će se i nutritivne vrijednosti obroka pa će se tako dobiti vrijednosti koje se nalaze ispod ćelije „Lijeva strana nejednadžbe“. Uzevši to u obzir, optimalna prehrana za prvi dan, uz prethodno rečenih tri cijela i 35% obroka 1, zahtijeva još 22% obroka 2 (88 g pilećih prsa + 22 g crvenog luka + 1 g češnjaka + 11 g maslinovog ulja + 35 g riže + 132 g brokule) te 50% obroka 3 (što predstavlja pola grejpa).

Slijedi prikaz modela prehrane za drugi dan, gdje x označava obrok 1, y označava obrok 2, z je obrok 3, a q je obrok 4.

$$\min C = 0.843x + 4.393y + 4.327z + 0.448q$$

$$480x + 840y + 840z + 110q \geq 2000$$

$$9x + 95y + 84z + 78q \geq 160$$

$$9x + 95y + 84z + 78q \leq 800$$

$$374x + 152y + 280z + 54q \geq 800$$

$$374x + 152y + 280z + 54q \leq 1500$$

$$23x + 31y + 63z \geq 44$$

$$23x + 31y + 63z \leq 78$$

$$6x + 4y + 9z \leq 22$$

$$19x + 72y + 57z + 2q \geq 50$$

$$19x + 72y + 57z + 2q \leq 175$$

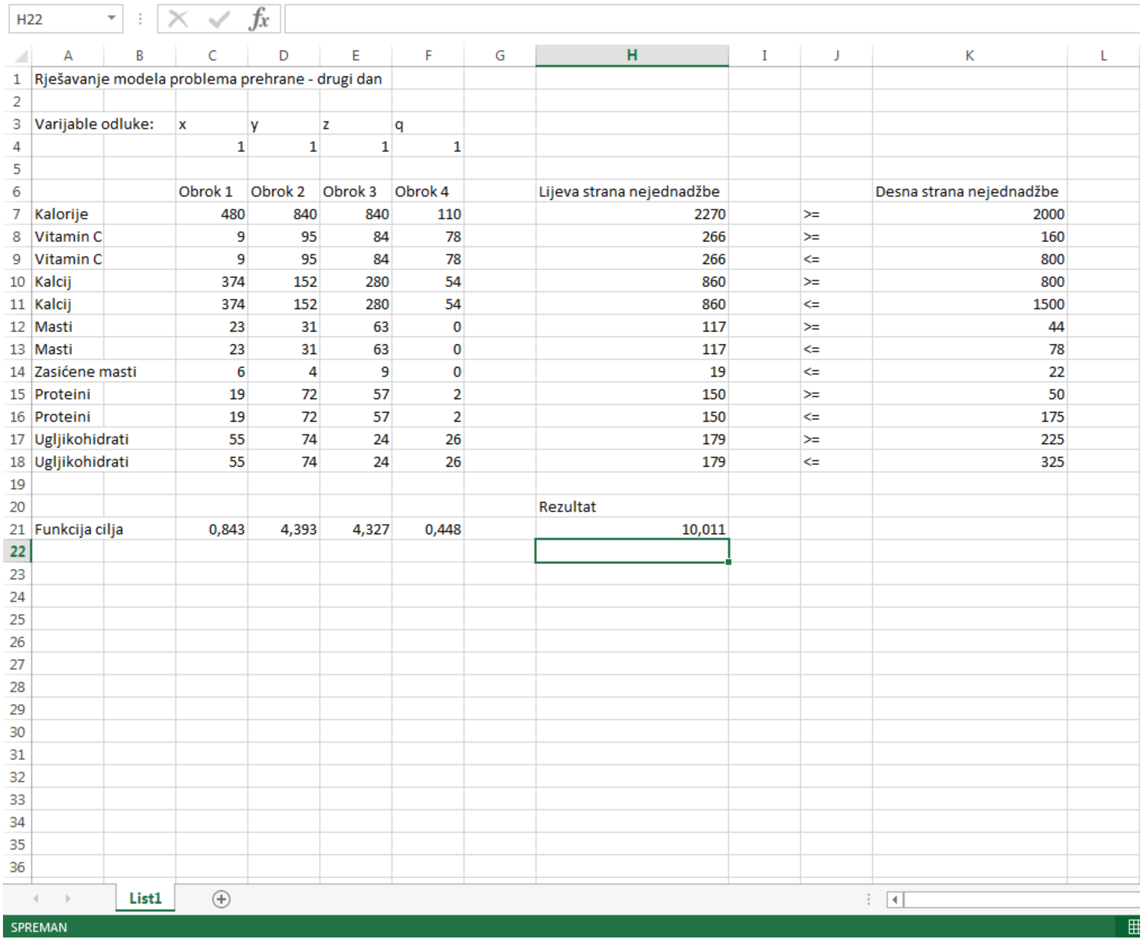
$$55x + 74y + 24z + 26q \geq 225$$

$$55x + 74y + 24z + 26q \leq 325$$

$$x, y, z, q \geq 0$$

Za razliku od prethodnog slučaja, model prehrane za drugi i treći dan će se odmah krenuti rješavati u Excelu.

Slika 3: Model problema prehrane za drugi dan, početno stanje



H22

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Rješavanje modela problema prehrane - drugi dan											
2												
3	Varijable odluke:		x	y	z	q						
4			1	1	1	1						
5												
6			Obrok 1	Obrok 2	Obrok 3	Obrok 4		Lijeva strana nejednadžbe			Desna strana nejednadžbe	
7	Kalorije		480	840	840	110		2270		>=	2000	
8	Vitamin C		9	95	84	78		266		>=	160	
9	Vitamin C		9	95	84	78		266		<=	800	
10	Kalcij		374	152	280	54		860		>=	800	
11	Kalcij		374	152	280	54		860		<=	1500	
12	Masti		23	31	63	0		117		>=	44	
13	Masti		23	31	63	0		117		<=	78	
14	Zasićene masti		6	4	9	0		19		<=	22	
15	Proteini		19	72	57	2		150		>=	50	
16	Proteini		19	72	57	2		150		<=	175	
17	Ugljikohidrati		55	74	24	26		179		>=	225	
18	Ugljikohidrati		55	74	24	26		179		<=	325	
19												
20								Rezultat				
21	Funkcija cilja		0,843	4,393	4,327	0,448		10,011				

List1

SPREMAN

Izvor: izrada autora, 2023.

Slika 4: Model problema prehrane za drugi dan, optimalno rješenje

	A	C	D	E	F	H	J	K
1	Rješavanje modela problema prehrane - drugi dan							
2								
3	Varijable odluke:	x	y	z	q			
4		3,391304348	0	0	3,383399209			
5								
6		Obrok 1	Obrok 2	Obrok 3	Obrok 4	Lijeva strana nejednadžbe		Desna strana nejednadžbe
7	Kalorije	480	840	840	110	2000	>=	2000
8	Vitamin C	9	95	84	78	294,4268775	>=	160
9	Vitamin C	9	95	84	78	294,4268775	<=	800
10	Kalcij	374	152	280	54	1451,051383	>=	800
11	Kalcij	374	152	280	54	1451,051383	<=	1500
12	Masti	23	31	63	0	78	>=	44
13	Masti	23	31	63	0	78	<=	78
14	Zasićene masti	6	4	9	0	20,34782609	<=	22
15	Proteini	19	72	57	2	71,20158103	>=	50
16	Proteini	19	72	57	2	71,20158103	<=	175
17	Ugljikohidrati	55	74	24	26	274,4901186	>=	225
18	Ugljikohidrati	55	74	24	26	274,4901186	<=	325
19								
20						Rezultat		
21	Funkcija cilja	0,843	4,393	4,327	0,448	4,374632411		

Izvor: izrada autora, 2023.

U slučaju modela problema prehrane za drugi dan se može uočiti nešto zanimljivo. Optimalno rješenje modela zahtijeva konzumiranje obroka 1 i obroka 4, ali obroci 2 i 3 ne dolaze u obzir. Razlog tomu je što prioritet modelu predstavlja minimiziranje troškova pri čemu zadana ograničenja moraju vrijediti, neovisno o tome kako će na kraju izgledati prehrana za taj dan. Prehrana za drugi dan izgleda neuobičajeno u najmanju ruku i vjerojatno je da većina ljudi ne bi prakticirala takvu prehranu nego bi konzumirala i obrok 2 i obrok 3, ali ne smije se zaboraviti da je jedna od pretpostavki modela za sva tri dana zanemarivanje preferencija korisnika modela. Imajući to na umu, osoba bi morala konzumirati 3 cijela obroka 1 i jedan manji obrok koji se sastoji od istih proizvoda (40 g banana, 8 g maslaca od kikirikija, 4 g kakaa u prahu, 8 g lanenih sjemenaka, 100 g mlijeka) te 3 cijela obroka 4 i jedan manji obrok istog sastava (otprilike polovica grejpa). Visina budžeta za drugi dan iznosi 4.37€.

Konačno, model problema prehrane za treći dan je prikazan dolje, gdje x označava obrok 1, a obrok 2 je označen s y.

$$\min C = 4.527x + 0.448y$$

$$1280x + 110y \geq 2000$$

$$65x + 78y \geq 160$$

$$65x + 78y \leq 800$$

$$271x + 54y \geq 800$$

$$271x + 54y \leq 1500$$

$$67x \geq 44$$

$$67x \leq 78$$

$$16x \leq 22$$

$$92x + 2y \geq 50$$

$$92x + 2y \leq 175$$

$$77x + 26y \geq 225$$

$$77x + 26y \leq 325$$

$$x, y \geq 0$$

Slika 5: Model problema prehrane za treći dan, početno stanje

	A	D	E	G	I	J
1	Rješavanje modela problema prehrane - treći dan					
2						
3	Varijable odluke:	x	y			
4		1	1			
5						
6		Obrok 1	Obrok 2	Lijeva strana nejednadžbe		Desna strana nejednadžbe
7	Kalorije	1280	110	1390	>=	2000
8	Vitamin C	65	78	143	>=	160
9	Vitamin C	65	78	143	<=	800
10	Kalcij	271	54	325	>=	800
11	Kalcij	271	54	325	<=	1500
12	Masti	67	0	67	>=	44
13	Masti	67	0	67	<=	78
14	Zasićene masti	16	0	16	<=	22
15	Proteini	92	2	94	>=	50
16	Proteini	92	2	94	<=	175
17	Ugljikohidrati	77	26	103	>=	225
18	Ugljikohidrati	77	26	103	<=	325
19						
20				Rezultat		
21	Funkcija cilja	4,527	0,448	4,975		

Izvor: izrada autora, 2023.

Slika 6: Model problema prehrane za treći dan, optimalno rješenje

	A	D	E	G	I	J
1	Rješavanje modela problema prehrane - treći dan					
2						
3	Varijable odluke:	x	y			
4		1,12534626	9,167244			
5						
6		Obrok 1	Obrok 2	Lijeva strana nejednadžbe		Desna strana nejednadžbe
7	Kalorije	1280	110	2448,840028	>=	2000
8	Vitamin C	65	78	788,1925208	>=	160
9	Vitamin C	65	78	788,1925208	<=	800
10	Kalcij	271	54	800	>=	800
11	Kalcij	271	54	800	<=	1500
12	Masti	67	0	75,39819945	>=	44
13	Masti	67	0	75,39819945	<=	78
14	Zasićene masti	16	0	18,00554017	<=	22
15	Proteini	92	2	121,8663435	>=	50
16	Proteini	92	2	121,8663435	<=	175
17	Ugljikohidrati	77	26	325	>=	225
18	Ugljikohidrati	77	26	325	<=	325
19						
20				Rezultat		
21	Funkcija cilja	4,527	0,448	9,201367729		

Izvor: izrada autora, 2023.

Komentar na optimalno rješenje modela prehrane za treći dan: optimalna vrijednost varijable x iznosi 1.13 zaokruženo, što znači da optimalna prehrana za taj dan zahtijeva konzumiranje jednog obroka 1 i još 13% tog obroka (izraženo u količinama pojedinih namirnica, taj obrok se sastoji od 90 g tjestenine, 192 g tune u konzervi, 45 g maslina, 170 g pelata, 34 g maslinovog ulja, 7 g češnjaka, 7 jaja), a optimalna vrijednost varijable y iznosi 9.17 zaokruženo, što znači da bi se u tom danu trebalo konzumirati obrok 2 otprilike 9 puta. U tom bi se slučaju predložilo da osoba smiksa grejpove te ih zajedno s vodom popije radi lakše konzumacije. Objektivno govoreći, model kao takav je prilično neuobičajen, ali i dalje je realan u smislu ostvarenja u stvarnom svijetu te je matematički gledano korektan. Budžet za treći dan iznosi oko 9.20€.

Iako su optimalna rješenja postignuta za sva tri dana, ne može se zanijekati da su rješenja prilično nepraktična po pitanju ostvarivanja takve prehrane u stvarnom svijetu, unatoč njihovoj korektnosti gledano matematički. Iz tog razloga, provest će se drukčiji pristup: u alat Solver će se unijeti ograničenje koje jamči da vrijednosti varijabli koje označavaju obroke budu cjelobrojne. Drugim riječima, rješenja koja će nastati na taj način će opisivati koliko cijelih obroka pojedinac mora konzumirati s ciljem zadovoljavanja svojih dnevnih nutritivnih potreba.

Slika 7: Model problema prehrane za prvi dan, cjelobrojno optimalno rješenje

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Rješavanje modela problema prehrane - prvi dan										
2											
3	Varijable odluke:		x	y	z						
4			1	1	2						
5											
6			Obrok 1	Obrok 2	Obrok 3		Lijeva strana nejednadžbe			Desna strana nejednadžbe	
7	Kalorije		500	1335	110		2055		>=	2000	
8	Vitamin C		0	550	78		706		>=	160	
9	Vitamin C		0	550	78		706		<=	800	
10	Kalcij		420	300	54		828		>=	800	
11	Kalcij		420	300	54		828		<=	1500	
12	Masti		9	63	0		72		>=	44	
13	Masti		9	63	0		72		<=	78	
14	Zasićene masti		3	10	0		13		<=	22	
15	Proteini		23	112	2		139		>=	50	
16	Proteini		23	112	2		139		<=	175	
17	Ugljikohidrati		80	100	26		232		>=	225	
18	Ugljikohidrati		80	100	26		232		<=	325	
19											
20							Rezultat				
21	Funkcija cilja		0,596	7,789	0,448		9,281				

Izvor: izrada autora, 2023.

Optimalno rješenje sada uključuje u cijelosti jedan obrok 1, jedan obrok 2 i dva obroka 3. Zanimljivo je za primijetiti kako se prethodno optimalno rješenje sastojalo od 3.35 obroka 1, 0.22 obroka 2 te 0.50 obroka 3 pa bi se moglo pomisliti zašto jednostavno ne zaokružiti te brojeve i tako izbjeći stvaranje novih ograničenja i redefiniranje modela. Ovaj primjer problema prehrane je savršen primjer po tome što upravo opovrgava takvo razmišljanje. Razlog zašto takvo razmišljanje nije točno je taj da zaokruživanjem ovih vrijednosti se dolazi do prehrane koja obuhvaća određene količine obroka, ali one ne rezultiraju najmanjim mogućim budžetom, odnosno negdje bi ipak bilo moguće i dalje smanjiti budžet za tu prehranu. Također, moguće je da bi tada neka ograničenja bila prekršena. Cijena optimalne prehrane za ovaj dan sada iznosi 9.28€.

Slika 8: Model problema prehrane za drugi dan, cjelobrojno optimalno rješenje

H22

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Rješavanje modela problema prehrane - drugi dan											
2												
3	Varijable odluke:		x	y	z	q						
4			3	0	0	6						
5												
6			Obrok 1	Obrok 2	Obrok 3	Obrok 4		Lijeva strana nejednadžbe			Desna strana nejednadžbe	
7	Kalorije		480	840	840	110		2100		>=	2000	
8	Vitamin C		9	95	84	78		495		>=	160	
9	Vitamin C		9	95	84	78		495		<=	800	
10	Kalcij		374	152	280	54		1446		>=	800	
11	Kalcij		374	152	280	54		1446		<=	1500	
12	Masti		23	31	63	0		69		>=	44	
13	Masti		23	31	63	0		69		<=	78	
14	Zasićene masti		6	4	9	0		18		<=	22	
15	Proteini		19	72	57	2		69		>=	50	
16	Proteini		19	72	57	2		69		<=	175	
17	Ugljikohidrati		55	74	24	26		321		>=	225	
18	Ugljikohidrati		55	74	24	26		321		<=	325	
19												
20								Rezultat				
21	Funkcija cilja		0,843	4,393	4,327	0,448		5,217				

List1

SPREMAN

Izvor: izrada autora, 2023.

Za razliku od prvog dana, ovdje optimalno rješenje i dalje ne obuhvaća obrok 2 i obrok 3 kao što nije ni u prethodnom slučaju. Optimalno rješenje nalaže konzumiranje 3 obroka 1 i 6 obroka 4, što košta 5.22€.

Slika 9: Model problema prehrane za treći dan, cjelobrojno optimalno rješenje

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Rješavanje modela problema prehrane - treći dan									
2										
3	Varijable odluke:			x	y					
4				1	9					
5										
6				Obrok 1	Obrok 2		Lijeva strana nejednadžbe			Desna strana nejednadžbe
7	Kalorije			1280	110		2270		>=	2000
8	Vitamin C			65	78		767		>=	160
9	Vitamin C			65	78		767		<=	800
10	Kalcij			271	54		757		>=	800
11	Kalcij			271	54		757		<=	1500
12	Masti			67	0		67		>=	44
13	Masti			67	0		67		<=	78
14	Zasićene masti			16	0		16		<=	22
15	Proteini			92	2		110		>=	50
16	Proteini			92	2		110		<=	175
17	Ugljikohidrati			77	26		311		>=	225
18	Ugljikohidrati			77	26		311		<=	325
19										
20							Rezultat			
21	Funkcija cilja			4,527	0,448		8,559			

Izvor: izrada autora, 2023.

Ako se postavi uvjet da varijable x i y moraju biti cjelobrojne, optimalno rješenje za treći dan tada ne postoji. Uočava se da su vrijede sva ograničenja osim ograničenja vezano za unos kalcija. Vrijednosti koje je Solver pružio su one koje su najbliže optimalnom rješenju. Vidi se da u slučaju ne nalaženja optimalnog rješenja, Solver zaokružuje vrijednosti koje su bile dane kod prethodnog rješenja za treći dan, to jest vrijednost 1.13 za varijablu x je zaokružena na 1, a vrijednost 9.17 za varijablu y je zaokružena na 9. Ovo je opet dobar primjer zašto samo zaokruživanje dobivenih vrijednosti varijabli nije dovoljno da bi rješenje bilo optimalno.

Zanemarujući prehranu trećeg dana zbog nemogućnosti pronalaska cjelobrojnog rješenja, uspoređivanjem prethodno dobivenih optimalnih rješenja za prvi i drugi dan s pripadajućim cjelobrojnim optimalnim rješenjima, primjećuje se kako su budžeti za odabrane prehrane manji od onih dobivenih kod cjelobrojnih rješenja (za prvi dan 3.93€ < 9.28€, za drugi dan 4.37€ < 5.22€). Objašnjenje se može naći upravo u postavljanju uvjete da varijable koje predstavljaju obroke moraju biti cjelobrojne. Učinivši to, prioritet minimiziranja troškova je nestao te je tada prioritet bio na tome da se prehrana sastoji od potpunih obroka. Još jedna razlika se može zamijetiti kod optimalnih rješenja, a to je da su rezultati hranjivih tvari i kalorija kod cjelobrojnih optimalnih rješenja također cjelobrojni dok to prije nije bio slučaj.

Konačno, sada kada su dobiveni ukupni troškovi za sva tri dana, potrebno je provjeriti je li ovakav plan prehrane izvediv u financijskom smislu. Budžet namijenjen potrošnji na hranu je jednak umnošku određenog broja sati u radnim danima kroz mjesec dana i minimalne naknade za obavljanje studentskih poslova po satu. Minimalna naknada iznosi 4.38€, ali što se tiče broja sati, postavlja se pitanje koliko zapravo radnih dana ima u jednom mjesecu. Kako bi se odgovorilo na ovo pitanje, za izračun će se uzeti najmanji mogući broj radnih dana u mjesecu tako da bi se mogao dobiti minimalni broj radnih sati koje student može imati, iz razloga što će onda ostali mjeseci s više radnih dana sigurno zadovoljavati financijski kriterij prehrane ako odabrani mjesec s najmanje radnih sati ne premašuje budžet. U skladu s time, taj mjesec će imati 28 dana ukupno, od kojih će broj radnih dana biti 20. Množenjem tog broja s minimalnom naknadom od 4.38€ i brojem 8 koji predstavlja broj radnih sati u jednom danu, dolazi se do iznosa od 700.8€, što je ujedno i budžet namijenjen prehrani. Drugim riječima, to je najmanji mogući iznos koji student može zaraditi obavljajući studentske poslove unutar mjesec dana. Što se tiče ukupnog mjesečnog troška na hranu, to će se izračunati tako što će se prvi, drugi i treći dan, odnosno njihovi troškovi određeni broj puta ponoviti tokom mjesec dana pa će se ti iznosi zbrojiti. Inače, nije bitno koji dan će zapravo biti prvi, drugi ili treći po redu jer će se niz ionako nastaviti kroz idući mjesec pa će onda taj mjesec započeti s drugim ili trećim danom, a ne s prvim. U svrhu ovog slučaja, uzet će se primjer niza u kojem je treći dan prvi, drugi ostaje drugi, a prvi dan je treći u nizu zbog toga što se želi dobiti najveći mogući trošak na hranu u jednom mjesecu (dani su raspoređeni po troškovima od najvećeg prema najmanjem). Tada ispada da se treći dan ponavlja 10 puta dok se prvi i drugi dan ponavljaju 9 puta, a ukupni mjesečni trošak će onda iznositi $10 \times 9.20€ + 9 \times 4.37€ + 9 \times 3.93€ = 166.7€$. Ovo je izvrstan rezultat jer je najveći mogući trošak na hranu od 166.7€ značajno manji od najmanje moguće mjesečne zarade od 700.8€. U stvarnom svijetu, sva zarada koju pojedinac ostvari prilikom obavljanja poslova nije nikad namijenjena u potpunosti na potrošnju za hranu, već i za druge raznovrsne stvari, bilo da se radi o drugim, neprehrambenim proizvodima, druženjima, raznim aktivnostima poput putovanja ili ostalog, a ovaj rezultat pogoduje tome zato što ostavlja veći dio budžeta za ostvarivanje toga.

Pronalaskom prehrane koja zadovoljava određene dnevne nutritivne potrebe pojedinca i koja ne iziskuje veći dio budžeta kojeg student zaradi tokom jednog mjeseca, ostvaren je cilj rada, no postavlja se pitanje koliko dugo će biti relevantni podaci korišteni u ovom radu, primjerice oni koji se tiču cijena proizvoda, satnice za obavljanje studentskih poslova i drugo. Cijene prehrambenih proizvoda imaju tendenciju rasta kako vrijeme prolazi, a pretpostavlja se kako će isto tako rasti i plaće po satu obavljenog studentskog posla pa bi to na neki način neutraliziralo nastanak većeg troška za namirnice. U svakom slučaju, do koje god promjene dođe, bit će potrebno uvrstiti nove vrijednosti u model i ponovno provesti računanje kako bi se došlo do rješenja koja će vjerojatno biti različita od onih dobivenih u ovom radu.

5.4.Dualni problem za problem prehrane studenta i interpretacija cijena u sjeni

Optimalno rješenje dualnog problema se može iščitati iz finalne simpleks tablice koja se dobije na kraju rješavanja problema, ali to ovdje nije slučaj. Budući da je bilo previše ograničenja i varijabli u modelu za manualno rješavanje problema, rješenje dualnog problema se ne može vidjeti u finalnoj simpleks tablici jer te tablice nema, ali postoji drugačiji način pronalaska tog rješenja. Rješavanjem problema prehrane pomoću alata Solver, može se postaviti opcija da program izbaci izvješće o osjetljivosti, radni list koji sadrži podatke preko kojih se može saznati više o dualnom rješenju, ali i koji će kasnije poslužiti kod analize osjetljivosti problema. Prije proučavanja podataka iz izvješća o osjetljivosti, prikazat će se kako izgledaju dualni problemi za problem prehrane za sva tri dana.

Prvi dan:

$$\max R = 2000\lambda_1 + 160\lambda_2 - 800\lambda_3 + 800\lambda_4 - 1500\lambda_5 + 44\lambda_6 - 78\lambda_7 - 22\lambda_8 + 50\lambda_9 - 175\lambda_{10} + 225\lambda_{11} - 325\lambda_{12}$$

$$500\lambda_1 + 420\lambda_4 - 420\lambda_5 + 9\lambda_6 - 9\lambda_7 - 3\lambda_8 + 23\lambda_9 - 23\lambda_{10} + 80\lambda_{11} - 80\lambda_{12} \leq 0.596$$

$$1335\lambda_1 + 550\lambda_2 - 550\lambda_3 + 300\lambda_4 - 300\lambda_5 + 63\lambda_6 - 63\lambda_7 - 10\lambda_8 + 112\lambda_9 - 112\lambda_{10} + 100\lambda_{11} - 100\lambda_{12} \leq 7.789$$

$$110\lambda_1 + 78\lambda_2 - 78\lambda_3 + 54\lambda_4 - 54\lambda_5 + 2\lambda_9 - 2\lambda_{10} + 26\lambda_{11} - 26\lambda_{12} \leq 0.448$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12} \geq 0$$

Drugi dan:

$$\max R = 2000\lambda_1 + 160\lambda_2 - 800\lambda_3 + 800\lambda_4 - 1500\lambda_5 + 44\lambda_6 - 78\lambda_7 - 22\lambda_8 + 50\lambda_9 - 175\lambda_{10} + 225\lambda_{11} - 325\lambda_{12}$$

$$480\lambda_1 + 9\lambda_2 - 9\lambda_3 + 374\lambda_4 - 374\lambda_5 + 23\lambda_6 - 23\lambda_7 - 6\lambda_8 + 19\lambda_9 - 19\lambda_{10} + 55\lambda_{11} - 55\lambda_{12} \leq 0.843$$

$$840\lambda_1 + 95\lambda_2 - 95\lambda_3 + 152\lambda_4 - 152\lambda_5 + 31\lambda_6 - 31\lambda_7 - 4\lambda_8 + 72\lambda_9 - 72\lambda_{10} + 74\lambda_{11} - 74\lambda_{12} \leq 4.393$$

$$840\lambda_1 + 84\lambda_2 - 84\lambda_3 + 280\lambda_4 - 280\lambda_5 + 63\lambda_6 - 63\lambda_7 - 9\lambda_8 + 57\lambda_9 - 57\lambda_{10} + 24\lambda_{11} - 24\lambda_{12} \leq 4.327$$

$$110\lambda_1 + 78\lambda_2 - 78\lambda_3 + 54\lambda_4 - 54\lambda_5 + 2\lambda_9 - 2\lambda_{10} + 26\lambda_{11} - 26\lambda_{12} \leq 0.448$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12} \geq 0$$

Treći dan:

$$\max R = 2000\lambda_1 + 160\lambda_2 - 800\lambda_3 + 800\lambda_4 - 1500\lambda_5 + 44\lambda_6 - 78\lambda_7 - 22\lambda_8 + 50\lambda_9 - 175\lambda_{10} + 225\lambda_{11} - 325\lambda_{12}$$

$$1280\lambda_1 + 65\lambda_2 - 65\lambda_3 + 271\lambda_4 - 271\lambda_5 + 67\lambda_6 - 67\lambda_7 - 16\lambda_8 + 92\lambda_9 - 92\lambda_{10} + 77\lambda_{11} - 77\lambda_{12} \leq 4.527$$

$$110\lambda_1 + 78\lambda_2 - 78\lambda_3 + 54\lambda_4 - 54\lambda_5 + 2\lambda_9 - 2\lambda_{10} + 26\lambda_{11} - 26\lambda_{12} \leq 0.448$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12} \geq 0$$

Iako su modeli problema prehrane različiti za sva tri dana, mogu se primijetiti neki detalji koji su im zajednički. Za početak, sva tri modela imaju jednak broj različitih lambdi (njih dvanaest) jer sva tri imaju dvanaest ograničenja u svojim pripadajućim primalima. Nadalje, posljednje ograničenje kod sva tri duala je isto jer je u svim danima predložen isti posljednji obrok, a funkcija cilja kod duala je isto tako identična jer sva tri modela u svojim primalima imaju kod ograničenja vrijednosti koje su preporučene kao dnevni unosi određenih tvari, odnosno kalorija. Naravno, uvjet nenegativnosti varijabli mora biti prisutan kod svih modela.

Slika 10: Model problema prehrane za prvi dan, izvješće o osjetljivosti

Microsoft Excel 15.0 Izvješće o osjetljivosti
Radni list: [Model problema prehrane - prvi dan2.xlsx]List1
Izvješće je stvoreno: 26.9.2023. 16:18:42

Varijabilne ćelije

Ćelija	Naziv	Završno Vrijednost	Reducirano Trošak	Cilj Koeficijent	Dopustivo Povećanje	Dopustivo Smanjenje
C4	x	3,349970291	0	0,596	0,065432234	24,67213333
D4	y	0,219845514	0	7,789	1E+30	0,458025641
E4	z	0,501089325	0	0,448	0,064956364	0,521984091

Ograničenja

Ćelija	Naziv	Završno Vrijednost	Sjena Cijena	Ograničenje Desna strana	Dopustivo Povećanje	Dopustivo Smanjenje
G10	Kalcij Lijeva strana nejednadžbe	1500	0	800	700	1E+30
G11	Kalcij Lijeva strana nejednadžbe	1500	-0,000151625	1500	103,2516275	24,24176367
G12	Masti Lijeva strana nejednadžbe	44	0,073298079	44	4,6	2,330334442
G13	Masti Lijeva strana nejednadžbe	44	0	78	1E+30	34
G14	Zasićene masti Lijeva strana nejednadžbe	12,24836601	0	22	1E+30	9,751633987
G15	Proteini Lijeva strana nejednadžbe	102,6741929	0	50	52,67419291	1E+30
G16	Proteini Lijeva strana nejednadžbe	102,6741929	0	175	1E+30	72,32580709
G17	Ugljikohidrati Lijeva strana nejednadžbe	303,0104971	0	225	78,01049713	1E+30
G18	Ugljikohidrati Lijeva strana nejednadžbe	303,0104971	0	325	1E+30	21,98950287
G7	Kalorije Lijeva strana nejednadžbe	2023,598732	0	2000	23,59873242	1E+30
G8	Vitamin C Lijeva strana nejednadžbe	160	0,005848561	160	118,2914764	32,04987799
G9	Vitamin C Lijeva strana nejednadžbe	160	0	800	1E+30	640

Izvješće o odgovoru 1 | Izvješće o osjetljivosti 1 | Izvješće o granicama 1 | List1

SPREMAN

Izvor: izrada autora, 2023.

Ono što je bitno za analizu dualnog problema je cijena u sjeni, odnosno vrijednosti koje se nalaze u donjoj tablici u stupcu pod nazivom „Sjena cijena“. Ako je vrijednost u tom stupcu nula, to najčešće znači da ograničenje, koje se nalazi u retku u kojem je ta vrijednost, nije aktivno, ali ne mora nužno biti tako. Općenito govoreći, ako se neaktivno ograničenje zamisli kao pravac koji zajedno s ostalim ograničenjima (pravcima) označava prostor u ravnini u kojem se nalazi optimalno rješenje problema, gdje su i ti pravci dio tog prostora, optimalno rješenje se tada ne nalazi na tom neaktivnom ograničenju. U suprotnome, ako je vrijednost u stupcu „Sjena cijena“ različita od nule, ograničenje kojem pripada ta vrijednost je aktivno, to jest optimalno rješenje je točka koja se nalazi na tom pravcu, ali u skladu s prethodno rečenim, ako je vrijednost u tom stupcu jednaka nuli, ograničenje i dalje može biti aktivno. Zato je pravi dokaz o tome da se radi o aktivnom ograničenju jednakost vrijednosti u stupcu „Završno vrijednost“ i pripadajuće vrijednosti u stupcu „Ograničenje desna strana“. Vidi se da postoje tri aktivna ograničenja u modelu problema prehrane prvoga dana. Vezano upravo za ta aktivna ograničenja, kako u prvom danu tako i u ostalim, ako je vrijednost negativna, to znači da se odnosi na gornju granicu ograničenja, a ako je pozitivna, onda se odnosi na donju granicu. Prva vrijednost u stupcu -0.000151625 se odnosi na gornju granicu ograničenja u vezi dnevnog unosa kalcija te ona znači da u slučaju kada bi se gornja granica koja predstavlja najveći dozvoljenu dnevnu dozu kalcija povećala s 1500 mg na 1501 mg, tada bi se ukupni trošak na prehranu za prvi dan smanjio za 0.000151625€, što je zanemarivo kada bi se vrijednost zaokružila na dvije decimale. To bi se moglo objasniti tako da postoji određeni obrok koji bi bio jeftinija opcija, a koji bi se mogao upotrijebiti da je najveća dopuštena doza 1501 mg kalcija jer taj alternativni obrok sadrži više kalcija, ali zbog limita od 1500 mg nije mogao biti dio optimalnog rješenja. Interpretacija druge vrijednosti 0.073298079 bi bila da u slučaju kada bi donja granica ograničenja dnevnog unosa masti pala s 44 g na 43 g, tada bi se ukupni trošak prehrane za prvi dan smanjio za 0.073298079€ ili 0.07€ zaokruženo. Interpretacija posljednje treće vrijednosti 0.005848561 je da u slučaju kada bi se najmanji dopušteni dnevni unos vitamina C smanjio s 160 mg na 159 mg, ukupni trošak prehrane bi se smanjio za 0.005848561€, to jest takva bi promjena imala zanemarivi utjecaj na ukupan trošak.

Slika 11: Model problema prehrane za drugi dan, izvješće o osjetljivosti

Microsoft Excel 15.0 Izvješće o osjetljivosti
Radni list: [Model problema prehrane - drugi dan2.xlsx]List1
Izvješće je stvoreno: 5.10.2023. 16:21:40

Varijabilne ćelije

Ćelija	Naziv	Završno Vrijednost	Reducirano Trošak	Cilj Koeficijent	Dopustivo Povećanje	Dopustivo Smanjenje
C4	x	3,391304348	0	0,843	1,111909091	1E+30
D4	y	0	2,47056917	4,393	1E+30	2,47056917
E4	z	0	3,951573123	4,327	1E+30	3,951573123
F4	q	3,383399209	0	0,448	1,407779279	0,2548125

Ograničenja

Ćelija	Naziv	Završno Vrijednost	Sjena Cijena	Ograničenje Desna strana	Dopustivo Povećanje	Dopustivo Smanjenje
H10	Kalcij Lijeva strana nejednadžbe	1451,051383	0	800	651,0513834	1E+30
H11	Kalcij Lijeva strana nejednadžbe	1451,051383	0	1500	1E+30	48,9486166
H12	Masti Lijeva strana nejednadžbe	78	0	44	34	1E+30
H13	Masti Lijeva strana nejednadžbe	78	-0,048343874	78	6,333333333	19,87402799
H14	Zasićene masti Lijeva strana nejednadžbe	20,34782609	0	22	1E+30	1,652173913
H15	Proteini Lijeva strana nejednadžbe	71,20158103	0	50	21,20158103	1E+30
H16	Proteini Lijeva strana nejednadžbe	71,20158103	0	175	1E+30	103,798419
H17	Ugljikohidrati Lijeva strana nejednadžbe	274,4901186	0	225	49,49011858	1E+30
H18	Ugljikohidrati Lijeva strana nejednadžbe	274,4901186	0	325	1E+30	50,50988142
H7	Kalorije Lijeva strana nejednadžbe	2000	0,004072727	2000	99,71014493	189,5763657
H8	Vitamin C Lijeva strana nejednadžbe	294,4268775	0	160	134,4268775	1E+30
H9	Vitamin C Lijeva strana nejednadžbe	294,4268775	0	800	1E+30	505,5731225

Izvješće o odgovoru 1 | Izvješće o osjetljivosti 1 | Izvješće o granicama 1 | List1

SPREMAN

Izvor: izrada autora, 2023.

Kod modela problema prehrane za drugi dan, postoje dva aktivna ograničenja koja obuhvaćaju vrijednosti različite od nule u stupcu „Sjena cijena“. Vrijednost -0.048343874 znači da bi se ukupni trošak prehrane za drugi dan smanjio za upravo tu vrijednost, odnosno 0.05€ zaokruženo, ako bi najveća dopuštena dnevna doza masti bila 79 g, a ne trenutačnih 78 g. S druge strane, vrijednost 0.004072727 bi značila da u situaciji kada bi se preporučeni dnevni unos kalorija smanjio s 2000 kcal na 1999 kcal, ukupan trošak prehrane bi se smanjio za tu vrijednost, ali to smanjenje bi bilo zanemarivo kada bi se vrijednost zaokruživala na dvije decimale.

Slika 12: Model problema prehrane za treći dan, izvješće o osjetljivosti

Microsoft Excel 15.0 Izvješće o osjetljivosti
Radni list: [Model problema prehrane - treći dan.xlsx]List1
Izvješće je stvoreno: 5.10.2023. 16:59:37

Varijabilne ćelije

Ćelija	Naziv	Završno Vrijednost	Reducirano Trošak	Cilj Koeficijent	Dopustivo Povećanje	Dopustivo Smanjenje
D4	x	1,12534626	0	4,527	1E+30	2,278703704
E4	y	9,167243767	0	0,448	0,454059041	1E+30

Ograničenja

Ćelija	Naziv	Završno Vrijednost	Sjena Cijena	Ograničenje Desna strana	Dopustivo Povećanje	Dopustivo Smanjenje
G10	Kalcij Lijeva strana nejednadžbe	800	0,028810942	800	4,313432836	7,900834106
G11	Kalcij Lijeva strana nejednadžbe	800	0	1500	1E+30	700
G12	Masti Lijeva strana nejednadžbe	75,39819945	0	44	31,39819945	1E+30
G13	Masti Lijeva strana nejednadžbe	75,39819945	0	78	1E+30	2,601800554
G14	Zasićene masti Lijeva strana nejednadžbe	18,00554017	0	22	1E+30	3,994459834
G15	Proteini Lijeva strana nejednadžbe	121,8663435	0	50	71,86634349	1E+30
G16	Proteini Lijeva strana nejednadžbe	121,8663435	0	175	1E+30	53,13365651
G17	Ugljikohidrati Lijeva strana nejednadžbe	325	0	225	100	1E+30
G18	Ugljikohidrati Lijeva strana nejednadžbe	325	-0,042607341	325	1,93442251	2,076838032
G7	Kalorije Lijeva strana nejednadžbe	2448,840028	0	2000	448,8400277	1E+30
G8	Vitamin C Lijeva strana nejednadžbe	788,1925208	0	160	628,1925208	1E+30
G9	Vitamin C Lijeva strana nejednadžbe	788,1925208	0	800	1E+30	11,80747922

Izvješće o odgovoru 1 | Izvješće o osjetljivosti 1 | Izvješće o granicama 1 | List1

SPREMAN

Izvor: izrada autora, 2023.

Model problema prehrane trećeg dana ima dva aktivna ograničenja, jedno od njih je vezano za donju granicu preporučenog dnevnog unosa kalcija dok je drugo vezano za gornju granicu preporučenog dnevnog unosa ugljikohidrata. Interpretacija za prvu vrijednost bi glasila ovako: ako bi se najmanja dopuštena dnevna količina kalcija smanjila s 800 mg na 799 mg, onda bi se ukupni trošak prehrane za treći dan smanjio za 0.028810942€ ili 0.03€ zaokruženo. Druga vrijednost se interpretira na način da u slučaju povećanja najviše dopuštenog dnevnog unosa ugljikohidrata s 325 g na 326 g, tada bi se ukupni trošak prehrane reducirao za 0.042607341€, što bi se zaokružilo na 0.04€. Ukratko, iako je već ranije rečeno što znače nule kod cijena u sjeni, njihova interpretacija kod sva tri dana bi bila da u slučaju kada bi se donja ili gornja granica ograničenja spustila, odnosno podigla za 1, to ne bi imalo utjecaja na optimalnu vrijednost funkcije cilja, to jest na ukupan trošak prehrane jer ionako već postoji prostor do donje ili gornje granice u kojem se optimalno rješenje moglo spustiti ili podići, a koji nije iskorišten.

Ovo potpoglavlje se uglavnom bavilo samo jednim, manjim dijelom druge tablice izvješća o osjetljivosti. Ostatak izvješća, odnosno druge vrijednosti u tablicama komentirat će se u sljedećem dijelu rada.

5.5.Analiza osjetljivosti problema prehrane studenta

Analiza osjetljivosti će se provesti na sva tri dana modela problema prehrane studenta, počevši od prvog dana, koji će se razlikovati od ostala dva dana po tome što će se u tom dijelu rada usput komentirati kakav utjecaj određene promjene u poljima tablice imaju na model prehrane općenito. Proučavat će se kakve promjene na optimalno rješenje, optimalnu bazu rješenja i optimalnu vrijednost funkcije cilja donosi mijenjanje određenih stavki u tablicama. Kada se govori o mijenjanju optimalnog rješenja, misli se na mijenjanje varijabli čije su vrijednosti dio tog optimalnog rješenja, a mijenjanjem optimalnog rješenja se direktno mijenja i optimalna vrijednost funkcije cilja budući da se ona dobiva uvrštavanjem vrijednosti varijabli optimalnog rješenja. Promjene optimalne baze rješenja su prisutne u situaciji kada određene varijable koje su prethodno bile dio optimalnog rješenja nakon određenih promjena u modelu više ne predstavljaju dio optimalnog rješenja modela pa je moguće da su njihovu ulogu preuzele neke druge varijable. Podatci koji će se komentirati u prvim tablicama će se odnositi na cijenu pojedinih obroka dok će u drugim tablicama vrijednosti imati ulogu količine unosa određenih tvari.

Prvi dan:

Prva tablica: počevši od prve varijable, odnosno obroka 1, dopustivo povećanje pokazuje da se koeficijent uz prvu varijablu može povećati do 0.065432234, a dopustivo smanjenje kaže da se koeficijent 0.596 može smanjiti za 24.67213333, što bi onda značilo da bi cijena obroka 1 mogla biti čak i -24.07613333 (zaokruženo -24.08 €). Iako matematički ispravno, to u ekonomskim terminima nema smisla. Koeficijent uz drugu varijablu ima dopustivo povećanje u beskonačnost što bi značilo koliko god visoka cijena tog obroka bila, pojedinac će i dalje uzimati već dobivenu optimalnu količinu tog obroka 2, iako će tada optimalna vrijednost funkcije cilja rasti (ukupan trošak prehrane za taj dan će porasti). Razlog tome je što taj obrok sadrži određene hranjive tvari koje pojedinac mora zadovoljiti u skladu s navedenim ograničenjima modela, a koje ne može dobiti nekim drugim načinom. Polje u stupcu „Dopustivo smanjenje“ ima vrijednost 0.458025641 što znači da se koeficijent 7.789 može smanjiti do 7.330974359, to jest cijena obroka 2 bi mogla minimalno iznositi 7.33€ zaokruženo. Kao što je bilo s koeficijentom uz prvu varijablu, slično je i s koeficijentom uz treću varijablu koji ima jasno određena dopustiva povećanja i dopuštena smanjenja, točnije rečeno, koeficijent 0.448 može poprimiti vrijednosti od -0,073984091 do 0.512956364 (od -0.07€ do 0.51€ zaokruženo). Pozitivni dio tog raspona ima matematičkog i ekonomskog smisla dok negativni dio nije ostvariv u stvarnom svijetu. Vezano za stupac „Reducirano trošak“, ako bi neka vrijednost različita od nule bila prisutna u tom stupcu, ta vrijednost bi imala određeno ekonomsko značenje. Primjerice, ako se pretpostavi da je za neki obrok u tom stupcu prisutna vrijednost l i ako postavimo model za taj dan na način da zahtijevamo konzumiranje minimalno 1 količine tog obroka, tada će optimalno rješenje uključivati minimalno jednom taj obrok i optimalna vrijednost funkcije cilja, koja je prethodno dobivena bez korištenja tog obroka, povećat će se za vrijednost navedenu u reduciranom trošku, odnosno za l. Prva tablica u biti govori o promjeni optimalne vrijednosti funkcije cilja modela putem promjene koeficijenata u toj funkciji cilja, a bez promjene optimalnih vrijednosti varijabli, to jest optimalnog rješenja.

Druga tablica: u drugoj tablici kao što je prethodno rečeno, mogu se uočiti koja su ograničenja aktivna, a koja neaktivna. Ovaj dio analize osjetljivosti služi za proučavanje promjena na desnoj strani ograničenja modela, pri čemu će poslužiti posljednja dva stupca tablice, stupac „Dopustivo povećanje“ i stupac „Dopustivo smanjenje“. Ako se radi o neaktivnom ograničenju, jedna od vrijednosti pokazivat će neograničenu promjenu u smjeru povećanja ili smanjenja dok će u drugom stupcu biti vrijednost koja ili oduzimanjem od ili dodavanjem na broj koji se nalazi u stupcu „Ograničenje desna strana“ dovodi do toga da taj broj bude jednak broju u pripadajućem mjestu stupca „Završno vrijednost“. Drugim riječima, tada to ograničenje postaje aktivno. Nadalje, mijenjanjem vrijednosti neaktivnog ograničenja u prostoru čije su granice određene vrijednostima iz posljednja dva stupca, ne mijenja se optimalno rješenje, kao ni optimalna baza rješenja niti optimalna vrijednost funkcije cilja. Ako se nekim slučajem vrijednost promijeni toliko da prelazi granice dopuštenog povećanja ili smanjenja, tada dolazi do promjena u optimalnom rješenju, optimalnoj bazi rješenja i optimalnoj vrijednosti funkcije cilja. Ovo vrijedi kako za neaktivna, tako i za aktivna ograničenja. Vezano za aktivno ograničenje, ako se vrijednost „Ograničenja desna strana“ promijeni unutar granica koje su predstavljene vrijednostima u posljednja dva stupca tablice, mijenja se optimalno rješenje modela, ali i optimalna vrijednost funkcije cilja, što se može izračunati pomoću prethodno spomenutih cijena u sjeni. Međutim, ne dolazi do promjene optimalne baze rješenja. Radi obujma rada, komentirat će se samo granice aktivnih ograničenja i po jedan primjer neaktivnog ograničenja u modelima svakog dana. Prvo aktivno ograničenje se odnosi na gornju granicu ograničenja modela vezano za unos kalcija. Granice unutar kojih se ograničenje od 1500 može mijenjati, a bez da se promijeni optimalna baza rješenja su 1475.75823633 i 1603.2516275, to jest model može imati gornju granicu između 1476 mg i 1603 mg zaokruženo. Sljedeće ograničenje je vezano za donju granicu unosa masti te vrijednost granice može biti između 42 g i 49 g zaokruženo, a vrijednost ograničenja kod donje granice unosa vitamina C mora biti između 128 mg i 278 mg zaokruženo kako se ne bi promijenila optimalna baza rješenja. Za primjer neaktivnog ograničenja uzet će se ograničenje vezano za donju granicu dnevnog unosa kalcija. Ako se ograničenje od 800 mg kalcija poveća na 801 mg, neće doći do promjene optimalne baze rješenja modela.

Drugi dan:

Prva tablica: u ovoj tablici modela problema prehrane za drugi dan se može primijetiti kako kod druge i treće varijable, odnosno kod obroka 2 i obroka 3, u stupcu „Reducirano trošak“ postoje vrijednosti koje nisu jednake nuli. Za obrok 2 bi to značilo da ako se postavi model tako da zahtijeva konzumiranje tog obroka t broj puta, tada će se optimalna vrijednost funkcije cilja povećati za $t \times 2.47$€. Ako se isto pretpostavi za obrok 3, optimalna vrijednost funkcije cilja će biti povećana za $t \times 3.95$€. Koeficijent prve varijable modela 0.843 se može smanjiti beskonačno mnogo, a povećati za 1.11€, što daje prilično velik prostor za manipulaciju cijenom obroka 1, uspoređujući s podatcima dobivenim za varijable u modelu prvog dana. Ovakav rezultat, iako iznenađujući, ima smisla uzevši u obzir da se model „odrekao“ obroka 2 i obroka 3 jer nisu isplativi u odnosu na preostala dva obroka u drugom danu. Koeficijent uz obrok 4 koji iznosi 0.448 može se smanjiti do cijene 0.19€, a povećati se može do 1.86€. Kako druga i treća varijabla ne ulaze u optimalnu bazu rješenja modela, kao što se vidi iz tablice, koliko god se povećala cijena tih obroka, to neće mijenjati rješenje u kojem se ta dva obroka neće konzumirati. Tek kada se njihova cijena snizi ispod 1.92€, odnosno 0.38€, oni će ući u optimalnu bazu rješenja te će se početi upotrebljavati u prehrani, pri čemu će se značajno promijeniti rješenje modela.

Druga tablica: postoje dva aktivna ograničenja, ograničenje vezano za gornju granicu dnevnog unosa masti i ograničenje koje se odnosi na donju granicu dnevnog unosa kalorija. Kod prvoga, ograničenje od 78 g se može smanjiti do 58 g ili povećati do 84 g, a da se ne promijeni optimalna baza rješenja. Drugo se ograničenje može sniziti s 2000 kcal na 1810 kcal te povisiti na 2100 kcal kako bi optimalna baza ostala ista. Neaktivno ograničenje koje će se ovdje promatrati će biti vezano za dnevni unos zasićenih masti. Smanjenjem ograničenja s 22 g na 21 g zasićenih masti na dnevnoj razini neće se promijeniti optimalna baza rješenja.

Treći dan:

Prva tablica: kao i kod modela prehrane prvog dana, sve vrijednosti u stupcu „Reducirano trošak“ su nule, što znači da oba obroka čine optimalnu bazu rješenja. Cijene tih obroka, to jest njihovi koeficijenti imaju zanimljive granice unutar kojih se mogu kretati, a bez da se promijeni optimalna baza. Kako je model prehrane napravljen od samo dva obroka za treći dan, model je djelomično „prisiljen“ koristiti oba obroka što se može vidjeti po tome što postoji mogućnost povećanja do beskonačnosti za obrok 1, odnosno smanjenja do beskonačnosti za obrok 2. Cijena obroka 1 se može spustiti do 2.25€, a cijena obroka 2 može porasti do 0.90€ bez da se promijeni optimalna baza rješenja.

Druga tablica: ograničenje koje se odnosi na donju granicu dnevnog unosa kalcija i ograničenje vezano za gornju granicu dnevnog unosa ugljikohidrata predstavljaju aktivna ograničenja u modelu prehrane trećeg dana, gdje se prvo ograničenje može smanjiti na vrijednost od 792 mg i povećati na vrijednost od 804 mg, a drugo se ograničenje može smanjiti na vrijednost od 323 g i povećati na vrijednost od 327 g, pod uvjetom da se ne mijenja optimalna baza rješenja modela. Za primjer neaktivnog ograničenja uzet će se ograničenje dnevnog unosa kalorija. Ako korisnik modela odluči povećati ograničenje energetskog unosa s 2000 kcal na 2500 kcal dnevno, tada će doći do promjene u optimalnoj bazi rješenja modela trećeg dana te će biti potrebno ponoviti unos podataka u Excel i izračun kako bi se vidjelo koje su varijable postale dio novog optimalnog rješenja. Kako je model trećeg dana specifičan po tome da samo postoje dvije varijable, odnosno dva obroka, moguće je da će model i dalje imati obje varijable kao dio optimalne baze, osim ako navedena promjena nije toliko drastična za model da počne koristiti samo jedan obrok.

6. ZAKLJUČAK

Nakon što je određeno koji obroci će biti u kojem danu i koliko će ih biti u pojedinom danu, pronađene su cijene namirnica koje su sastavni dio obroka, što je kasnije poslužilo u pronalasku cijena tih istih obroka. Svaki od obroka se sastojao od određene količine kalorija i hranjivih tvari, a preporučeni dnevni unosi su poslužili kao ograničenja modela. Modeli problema prehrane za sva tri dana su se rješavali putem alata Solver u Microsoft Excelu. Unošenjem osnovnih podataka modela i određenih formula u ćelije Excela, dobilo se početno rješenje problema, a naknadnim korištenjem alata Solver našlo se optimalno rješenje.

Optimalno rješenje za model prehrane prvog dana uključuje 3.35 jedinica obroka 1, 0.22 jedinice obroka 2 i 0.50 jedinica obroka 3, a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi 3.93€, što ujedno predstavlja visinu budžeta za ostvarivanje takve prehrane.

Optimalno rješenje modela prehrane drugog dana je 3.39 jedinica obroka 1, 0 jedinica obroka 2, 0 jedinica obroka 3 i 3.38 jedinica obroka 4, odnosno konzumirali bi se obroci 1 i 4 dok se obroci 2 i 3 ne bi koristili. Budžet koji bi bio potreban za ovakvu prehranu, odnosno optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi 4.37€.

Model prehrane za treći dan je imao optimalno rješenje koje se sastojalo od 1.13 jedinica obroka 1 i 9.17 jedinica obroka 2. Iako prilično neuobičajen, model prehrane je i dalje ostariv u stvarnom svijetu, a budžet potreban za ovakvu prehranu je 9.20€.

Iz razloga što su prilično nepraktična po pitanju ostvarivanja u stvarnom svijetu, proveo se drugačiji način optimalnih rješenja modela na način da se u alat Solver postavilo ograničenje radi kojeg bi program morao davati rješenja koja su cjelobrojna. Optimalna rješenja su tada pokazivala koliko cijelih obroka pojedinac mora pojesti dnevno pa je tako za model prvog dana optimalno rješenje sadržavalo obrok 1, obrok 2 i dva obroka 3, model drugoga dana je imao optimalno rješenje od tri obroka 1 i šest obroka 4 dok kod modela prehrane trećeg dana ne postoji optimalno rješenje nakon postavljanja dodatnog ograničenja cjelobrojnosti rješenja. Budžeti za prehrane prvoga i drugoga dana su 9.28€, odnosno 5.22€, što je više uspoređujući s prethodnim rezultatima.

Jednom kada su bili dobiveni rezultati modela prehrane za sva tri dana, bilo je potrebno vidjeti jesu li oni mogući u financijskom smislu. Budžet namijenjen prehrani je iznosio 700.8€, a trošak ovakve prehrane je maksimalno 166.7€ što je i više nego zadovoljavajuće uzevši u obzir da pojedinac ionako ne troši sav zarađeni novac na hranu, već i na druge stvari.

Proučavajući dualne probleme za problem prehrane studenta, uočilo se da postoje tri aktivna ograničenja u modelu problema prehrane prvog dana. Prvo se ograničenje odnosi na dnevni unos kalcija, drugo na dnevni unos masti, a treće ograničenje na dnevni unos vitamina C. Jedino se kod drugog ograničenja bi se primjetio utjecaj promjene na model u obliku smanjenja troška prehrane za prvi dan u iznosu od otprilike 0.07€.

U modelu problema prehrane za drugi dan postoje dva aktivna ograničenja, jedno vezano za dnevni unos masti, a drugo za dnevni unos kalorija. Ukupni trošak prehrane drugog dana bi se smanjio za oko 0.05€ ako bi osoba promjenila prehranu prema prvom ograničenju dok je prema drugom ograničenju smanjenje ukupnog troška zanemarivo.

Model problema prehrane trećeg dana ima dva aktivna ograničenja. Prvo se odnosi na dnevni unos kalcija, a drugo ograničenje je vezano za dnevni unos ugljikohidrata. Ako bi se promjenila dnevna količina kalcija na način na koji to pokazuje vrijednost kod prvog ograničenja, trošak prehrane za treći dan bi se smanjio za otprilike 0.03€. S druge strane, ako bi se povećao dnevni unos ugljikohidrata prema vrijednosti drugog aktivnog ograničenja, ukupan trošak prehrane trećeg dana bi se reducirao za oko 0.04€.

Analiza osjetljivosti služi kako bi se vidjelo kako mijenjanje određenih stavaka u tablicama utječe na optimalno rješenje, optimalnu bazu rješenja i optimalnu vrijednost funkcije cilja.

Kroz sva tri dana su se analizirale vrijednosti dobivene u prvim i drugim tablicama u izvješćima o osjetljivosti. Kod prvoga dana, u prvoj je tablici vidljivo kako je dopustivo povećanje za koeficijent uz prvu varijablu do vrijednosti 0.065432234, a dopustivo smanjenje objašnjava kako se koeficijent 0.0596 može sniziti do vrijednosti od -24.08€ zaokruženo. Koeficijent uz drugu varijablu je imao dopustivo povećanje u beskonačnost dok je dopustivo smanjenje omogućavalo da se cijena obroka 2 smanji do otprilike 7.33€. Cijena obroka 3 se mogla kretati od -0.07€ do 0.51€ zaokruženo, kako se ne bi promijenila optimalna baza rješenja. Druga tablica prvoga dana je ukazala na to da prvo aktivno ograničenje vezano za gornju granicu dnevnog unosa kalcija postavlja granice unutar kojih se unos može mijenjati pri čemu se neće promijeniti optimalna baza, a te granice su 1476 mg i 1603 mg. Sljedeće ograničenje postavlja granice od 42 g i 49 g za donju granicu unosa masti, a kod dnevnog unosa vitamina C granice su 128 mg i 278 mg.

U prvoj tablici modela problema prehrane za drugi dan se primijetilo kako kod obroka 2 i obroka 3 pod „Reducirano trošak" postoje vrijednosti koje nisu jednake nuli iz razloga što se ta dva obroka nisu koristila u modelu. Cijena obroka 1 se može smanjiti beskonačno mnogo, a povećati za 1.11€ dok se cijena obroka 4 može smanjiti do cijene od 0.19€ te povećati do 1.86€ bez da se promijeni optimalna baza rješenja. Kako se obrok 2 i obrok 3 ne konzumiraju, povećanje njihovih cijena neće donijeti nikakve promjene, no do promjene modela prehrane za drugi dan će doći ako njihova cijena padne ispod 1.92€ za obrok 2, odnosno 0.38€ za obrok 3. Podatci u drugoj tablici pokazuju da postoje dva aktivna ograničenja, jedno vezano za gornju granicu dnevnog unosa masti, a drugo vezano za donju granicu dnevnog unosa kalorija. Prvo ograničenje postavlja granice od 58 g i 84 g između kojih se može mijenjati količina dnevnog unosa masti, a da se ne promijeni optimalna baza rješenja. Pod istim uvjetom da se optimalna baza ne mijenja, kod drugog ograničenja granice su 1810 kcal i 2100 kcal.

Kako kod modela prehrane prvog dana, tako je i ovdje za prvu tablicu trećeg dana bilo uočljivo da su svi obroci, odnosno oba obroka činila optimalnu bazu rješenja. Postojala je mogućnost povećanja cijene obroka 1 do beskonačnosti te smanjenja cijene obroka 2 do beskonačnosti, ali se zato cijena obroka 1 mogla spustiti do 2.25€, a cijena obroka 2 povećati do 0.90€ bez da se promijeni optimalna baza rješenja. Druga tablica je pokazala kako su ograničenje koje se odnosi na donju granicu dnevnog unosa kalcija i ograničenje vezano za gornju granicu dnevnog unosa ugljikohidrata aktivna ograničenja u modelu. Prvo je ograničenje moglo varirati između vrijednosti 792 mg i 804 mg, a drugo između 323 g i 327 g kako se ne bi promijenila optimalna baza rješenja modela.

Konačno, postavlja se pitanje koliko dugo će biti relevantni podaci korišteni u ovom radu, kao oni koji se tiču cijena proizvoda i satnice za obavljanje studentskih poslova. Cijene prehrambenih proizvoda imaju tendenciju rasta kako vrijeme prolazi, a pretpostavlja se kako će isto tako rasti i plaće po satu obavljenog studentskog posla pa bi to na neki način neutraliziralo nastanak većeg troška za namirnice. Do koje god promjene dođe, bit će potrebno uvrstiti nove vrijednosti u model i ponovno provesti računanje kako bi se došlo do rješenja koja će vjerojatno biti različita od onih dobivenih u ovom radu.

POPIS LITERATURE

Anderson, E. J. i Nash, P. (1987.), Linear programming in infinite-dimensional spaces: Theory and Applications, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons

Anton, H., Kolman, B. i Averbach, B. (1988.), *Applied Finite Mathematics*, 4. izd., San Diego, CA: Harcourt

Babić, Z. (2005.), *Linearno programiranje*, Split, Sveučilište u Splitu Ekonomski fakultet

Bas, E. (2014.), A robust optimization approach to diet problem with overall glycemic load as objective function, *Applied Mathematical Modelling, 38*(19-20), 4926-4940. https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.03.049

Bassi, L. J. (1976.), The Diet Problem Revisited, *The American Economist*, *20*(2), 35-39. https://doi.org/10.1177/056943457602000206

Baki, N. A., N Mangsor, N S. M. i Khairi A Razak, M. (2019.), Application of Linear Programming in Students' Diet Problem, *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering, 8*(1.5), 87-90. https://doi.org/10.30534/ijatcse/2019/1881.52019

Bertsimas, D. i Tsitsiklis, J. N. (1997.), *Introduction to Linear Optimization*, Belmont, MA: Athena Scientific

Bhatti, M. A. (2000.), Practical optimization methods: with Mathematica applications, New York, NY: Springer

Chiang, A. C. (1994.), *Osnovne metode matematičke ekonomije*, 3. izd., Zagreb: MATE

Dantzig, G. B. (1990.), Origins of the simplex method, u: Nash, S. G. (ur.), *A history of scientific computing* (str. 141-151.), New York, NY: ACM

Dantzig, G. B. (2002.), Linear Programming, *Operations Research, 50*(1), 42-47. https://doi.org/10.1287/opre.50.1.42.17798

Definicija hrane (b. d.), Preporučeni dnevni unos, preuzeto 19. rujna 2023. s https://definicijahrane.hr/definicija/preporuceni-dnevni-unos/

FAO (2010.), *Fats and fatty acids in human nutrition* [e-publikacija], preuzeto s https://www.fao.org/3/i1953e/i1953e00.pdf

Gallenti, G. (1997.), The use of computer for the analysis of input demand in farm management: A multicriteria approach to the diet problem, u: Kure, H., Thysen, I. i Kristensen, A. R. (ur.), *First European conference for information technology in agriculture* (str. 389-392.), Copenhagen: The Royal Veterinary and Agricultural University

Hillier, F. S. i Lieberman, G. J. (2001.), *Introduction to operations research*, 7. izd., New York, NY: McGraw-Hill

Iwuji, A. C., Nnanna, M. i Ndulue, N. I. C. (2016.), An optimal DASH diet model for people with hypertension using linear programming approach, *Open journal of optimization, 5*(01), 14-21. https://doi.org/10.4236/ojop.2016.51002

Kaldirim, E. i Köse, Z. (2006.), *Application of a multi-objective genetic algorithm to the modified diet problem* (Genetic and Evolutionary Computation Conference, vol. 6), preuzeto s http://gpbib.pmacs.upenn.edu/gecco2006etc/papers/wksp163.pdf

Kall, P. i Wallace, S. W. (1994.), *Stochastic Programming*, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons

LORA – laboratorij održivog razvoja (b. d.), Što je održivi razvoj, preuzeto 6. kolovoza 2023. s https://lora.bioteka.hr/sto-je-odrzivi-razvoj/

Lukač, Z. i Neralić, L. (2012.), *Operacijska istraživanja*, 1. izd., Zagreb: ELEMENT

Mamat, M., Rokhayati, Y., Noor, N. M. M. i Mohd, I. (2011.), Optimizing human diet problem with fuzzy price using fuzzy linear programming approach, *Pakistan Journal of Nutrition, 10*(6), 594-598.

Mamat, M., Zulkifli, N. F., Deraman, S. K. i Noor, N. M. M. (2012.), Fuzzy linear programming approach in balance diet planning for eating disorder and disease-related lifestyle, *Applied Mathematical Sciences, 6*(103), 5109-5118.

Mayo Clinic (b. d.), Carbohydrates: How carbs fit into a healthy diet, preuzeto 21. rujna 2023. s https://www.mayoclinic.org/healthy-lifestyle/nutrition-and-healthy-eating/in-depth/carbohydrates/art-20045705

Mayo Clinic Health System (b. d.), Are you getting too much protein?, preuzeto 21. rujna 2023. s https://www.mayoclinichealthsystem.org/hometown-health/speaking-of-health/are-you-getting-too-much-protein

Ministarstvo znanosti i obrazovanja RH (2022.), *Odluka o iznosu minimalne naknade za obavljanje studentskih poslova za 2023. godinu* [e-publikacija], preuzeto s http://sczg.unizg.hr/media/uploads/sservis/Odluka-o-iznosu-minimalne-naknade-za-obavljanje-studentskih-poslova-za-2023-godinu.pdf

Minoux, M. (1986.), *Mathematical Programming: Theory and Algorithms*, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons

Mohamed, N. F., Mohamed, N. A., Mohamed, N. H. i Mohamed, N. A. (2021.), An Integer Linear Programming Model For A Diet Problem Of Mcdonald's Sets Menu In Malaysia, *European Journal of Molecular & Clinical Medicine, 8*(02), 60-67.

Narodne novine (2013.), *Pravilnik o tvarima koje se mogu dodavati hrani i koristiti u proizvodnji hrane te tvarima čije je korištenje u hrani zabranjeno ili ograničeno* [e-publikacija], preuzeto s https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2013_12_160_3359.html

Neufeld, L. M., Hendriks, S. i Hugas, M. (2023., 2. siječanj), Healthy Diet: A Definition for the United Nations Food Systems Summit 2021, *Science and Innovations for Food Systems Transformation*, preuzeto s https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-15703-5_3

NHS (b. d.), What should my daily intake of calories be?, preuzeto 20. rujna 2023. s https://www.nhs.uk/common-health-questions/food-and-diet/what-should-my-daily-intake-of-calories-be/

Soper, J. (2004.), *Mathematics for Economics and Business*, 2. izd., Hoboken, NJ: Wiley-Blackwell

United Nations (b. d.), Millennium Development Goals, preuzeto 6. kolovoza 2023. s https://www.un.org/millenniumgoals/

United Nations (b. d.), Transforming our world: the 2030 Agenda for Sustainable Development, preuzeto 6. kolovoza 2023. s https://sdgs.un.org/2030agenda

University of Cambridge (b. d.), History of the Diet Problem, preuzeto 2. kolovoza 2023. s http://www.statslab.cam.ac.uk/~rrw1/opt/diet_history.html

Vaidya, N. V. i Kasturiwale, N. N. (2016.), Application of Quick Simplex Method (A New Approach) On Two Phase Method, *British Journal of Mathematics & Computer Science, 16*(1), 1-15.

Van Dooren, C. (2018., 21. lipnja), A review of the use of linear programming to optimize diets, nutritiously, economically and environmentally, *Frontiers in nutrition*, 5, 48, preuzeto s https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fnut.2018.00048/full

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA

ŽIVOTOPIS STUDENTA

Rođen 26. listopada 1997. godine, autor hrvatskog državljanstva je većinu života imao prebivalište u Zagrebu gdje je pohađao OŠ Dobriše Cesarića. Kasnije pohađa XV. gimnaziju nakon čega upisuje Ekonomski fakultet u Zagrebu. Posjeduje vozačku dozvolu B kategorije. Autor je tokom studiranja uglavnom obavljao fizičke poslove, a trenutno je zaposlen kao pripravnik u reviziji u poduzeću Ernst & Young d.o.o. Što se tiče jezičnih vještina, materinji jezici autora su hrvatski i španjolski te tečno govori i engleski jezik. Za vrijeme studiranja, autor je sudjelovao u volonterskim projektima.