Savršena Bayesova ravnoteža signalne igre između menadžera poduzeća i potencijalnog investitora

Skoko, Patrik

Sveučilište u Zagrebu

Ekonomski fakultet

Diplomski sveučilišni studij „Ekonomija“

SAVRŠENA BAYESOVA RAVNOTEŽA SIGNALNE IGRE IZMEĐU MENADŽERA PODUZEĆA I POTENCIJALNOG INVESTITORA

Patrik Skoko

Zagreb, rujan 2020.

Ekonomski fakultet

Diplomski sveučilišni studij „Ekonomija“

SAVRŠENA BAYESOVA RAVNOTEŽA SIGNALNE IGRE IZMEĐU MENADŽERA PODUZEĆA I POTENCIJALNOG INVESTITORA

PERFECT BAYESIAN EQUILIBRIUM IN SIGNALING GAME BETWEEN AN ENTREPRENEUR AND A POTENTIAL INVESTOR

Diplomski rad

Patrik Skoko, 006514398

Mentor: prof. dr. sc. Ilko Vrankić

Zagreb, September, 2020.

Sažetak i ključne riječi

Cilj istraživanja bio je pokazati kako se svakidašnje poslovne situacije mogu analizirati modelima iz teorije igara. Za područje istraživanja uzet je slučaj iz korporativnih financija, a dobiveni rezultat pokazao je kako signalna igra može poslužiti kao dobar model za smislenu i cjelovitu obradu poslovnih situacija u kojima je prisutna asimetričnost informacija.

Ključne riječi: korporativne financije, mikroekonomija, teorija igara, signalna igra, asimetričnost informacija

The aim of the research was to show how everyday business situations can be analyzed with models taken from game theory. The case from corporate finance was taken for the research area, and the obtained result showed that the signaling game can serve as a good model for meaningful and complete processing of the business situations characterized by information asymmetry.

Key words: corporate finance, microeconomics, game theory, signaling game, information asymmetry

Sadržaj

1. Uvod

1.1. Područje i cilj rada

Rad analizira problem koji je relativno česta pojava u području korporativnih financija i investicijskog odlučivanja za vrijeme situacije kada poduzeće, odnosno menadžment poduzeća, ima na raspolaganju informacije koje potencijalni investitori u poduzeće nemaju. Menadžmentu poduzeća pružila se prilika za investiranjem u novi projekt s pozitivnom čistom sadašnjom vrijednošću, međutim poduzeće na računu nema dovoljno raspoloživih novčanih sredstava i potrebna je intervencija investitora u obliku sufinanciranja rashoda projekta.

Iako problem po svojoj prirodi pripada korporativnim financijama, u radu će se analitička razrada obraditi modelom signalne igre koja u teoriji igara spada pod dinamičke igre s nepotpunim informacijama. U skladu s tim, cilj rada je pokazati kako se modelima iz teorije igara mogu obrađivati razni problemi iz ekonomskih sfera te kako upravo ta grana matematike, koja djeluje u sklopu mikroekonomskih istraživanja, može pružiti više nego dovoljne alata i modele za analizu spomenutih vrsta problema.

1.2. Izvori i metode prikupljanja podataka

U stručnoj literaturi problem su prvi analizirali Stewart C. Myers i Nicholas S. Majluf 1984. godine u svome radu *Corporate financing and investment decisions when firms have information that investors do not have* pritom koristeći trovremenski model u analizi. Kasnije, odnosno 1992. godine u svojoj knjizi *Game theory for applied economists* Robert Gibonns iznosi ideju kako se spomenuti problem može analizirati u okviru dinamičkih igara s nepotpunim informacijama.

Ostatak literature sačinjavaju dostupne stručne knjige iz područja ekonomije, mikroekonomije te ponajviše teorije igara.

1.3. Sadržaj i struktura rada

Rad je koncipiran na način da prvo obrađuje teoretski dio koji služi kao uvod i podloga za analitički dio u kojem se spomenuti problem iz područja korporativnih financija obrađuje u okviru teorije igara. Sistematično će biti prikazano što čini ekonomiju kao znanost te kako teorija igara kao primarno matematička disciplina može u domeni mikroekonomije služiti za proučavanje ekonomskih pojava.

2. Metodologija

2.1. Ekonomija

„Ekonomija izučava kako društva koriste oskudne resurse da bi proizvela vrijedne robe i usluge te ih podijelila različitim pojedincima.“[1]

U samoj srži područja izučavanja ekonomije nalaze se pitanja poput oskudnosti i učinkovitosti. Pojmovi oskudnost i učinkovitost upravo i postoje jedan radi drugoga: kada bi na svijetu postojala neograničena količina dobara (materijalnih) tada ne bi postojala niti potreba za učinkovitom raspodjelom. Upravo radi ograničenosti količine dostupnih dobara i neograničenosti želja javila se potreba za efikasnim korištenjem istih, odnosno organizacijom društva na način koji će rezultirati najefikasnijom uporabom resursa, odnosno onakvom raspodjelom koja će biti ekonomski učinkovita i Pareto efikasna.

„Ekonomska učinkovitost zahtijeva da gospodarstvo proizvede najvišu moguću kombinaciju količine i kvalitete roba i usluga uz danu tehnologiju i oskudne resurse. Gospodarstvo proizvodi efikasno kada se nečije ekonomsko blagostanje ne može poboljšati, a da ne našteti nekom drugom.“[2]

„Paretova efikasnost postiže se kada nikakva reorganizacija proizvodnje ili raspodjele ne može nikome poboljšati položaj, a da ga ne pogorša drugome. U uvjetima alokacijske efikasnosti, zadovoljstvo jedne osobe, odnosno njezina korisnost, može biti povećana samo umanjivanjem korisnosti druge osobe.“[3]

Dakle, u samoj svojoj suštini, pojmovi poput najefikasnije uporabe resursa, ekonomske učinkovitosti i Paretove efikasnosti zapravo su sinonimi.

---

[1]Samuelson, P.A. i Nordhaus, W.D. (2010) *Ekonomija*. MATE d.o.o., Zagreb

[2] Samuelson, P.A. i Nordhaus, W.D. (2010) *Ekonomija*. MATE d.o.o., Zagreb

[3] Samuelson, P.A. i Nordhaus, W.D. (2010) *Ekonomija*. MATE d.o.o., Zagreb

2.2. Makroekonomija, mikroekonomija i uloga matematike u proučavanju ekonomskih pojava

Ekonomija kao znanost sačinjena je od dva temeljna područja: makroekonomije i mikroekonomije.

Na stranu makroekonomije, koja se bavi proučavanjem gospodarstva kao cjeline, prati kretanja ekonomskih veličina kao što su nezaposlenost, inflacija i bruto domaći proizvod, te razvija modele koji bi državama trebali omogućiti ekspanzivne, odnosno restriktivne intervencije i politike, mikroekonomija se bavi ponašanjem potrošača, proizvođača, njihovom interakcijom, donošenjem odluka u uvjetima oskudnih resursa te interakcijom sudionika na uže definiranom tržištu, odnosno tržišnom segmentu.

U mikroekonomskoj teoriji dva su temeljna područja istraživanja: teorija ponašanja potrošača i teorija proizvodnje. U službi alata analize, i u teoriji ponašanja potrošača i u teoriji ponašanja proizvođača koristi se aksiomatski definirani model maksimizacije korisnost. U teoriji ponašanja potrošača opisuje se ponašanje potrošača na način da se pretpostavlja kako racionalni pojedinac uz dano budžetsko ograničenje maksimizira korisnost, dok se u teoriji proizvodnje proizvođačevo ponašanje opisuje na način da proizvođač maksimizira profit maksimizirajući funkciju proizvodnje uz istovremeno minimiziranje funkcije troškova. Dakle, profit iz teorije ponašanja potrošača ekvivalentan je proizvođačevoj korisnosti u teoriji ponašanja proizvođača.

„Ne postoji razlog da se matematika ne koristi u ekonomiji“[4]

U obje teorije, matematički modeli neizostavni su dio analize. Međutim, na stranu matematičkih modela, ekonomske probleme jako je teško definirati: iako je u teoriji ponašanja potrošača aksiomatski definirana racionalnost, u stvarnosti dolazi do iracionalnog ponašanja potrošača koje na kraju dovodi do toga da on ne kupuje optimalnu košaru dobara (npr. zaboravio je kupiti određene namirnice). U skladu s tim, ekonomske pojave nisu uvijek egzaktne i sve varijable ne mogu se trenutno spoznati, a u same modele je potrebno uključiti ljudski element i psihološki faktor što ih čini iznimno zahtjevnim za

[4] von Neumann, J. and Morgenstern, O., (1944.) *Theory of games and economic behavior*. Princeton: Princeton University Press.

razvijanje. Uz to, neke ekonomske veličine gotovo je nemoguće definirati (kardinalna korisnost). Nadalje ekonomija je, usporedno s ostalim znanostima, relativno mlada znanost, a čak ni puno razvijenije znanosti, poput fizike, nemaju univerzalnu teoriju (univerzalne modele) koja sve obuhvaća.

Unatoč svim problemima s primjenom matematike u opisivanju ekonomskih pojava teorija igara pokazala se granom matematike koja je vrlo uspješna u tom naumu, a na tragu takvoga razmišljanja o primjeni iste u ekonomiji bio je i Paul A. Samuelsona:

„Za biti doslovan u modernom dobu, potrebno je imati generalno razumijevanje teorije igara.“[5]

2.3. Teorija igara

U duhu oskudnosti i učinkovitosti te borbe za prevlašću i probitkom, ekonomsko ponašanje u širem smislu može se definirati kao svaka strateška interakcija između dva ili više sudionika s ciljem maksimiziranja vlastite korisnosti uz dana ograničenja te uzimanja u obzir korisnosti i ograničenja ostalih sudionika. U skladu s tim, jedan od način na koji se mogu opisati ekonomske iteracije jest teorija igara.

„Strateško razmišljanje umijeće je nadmašivanja suparnika, sa sviješću da suparnik nastoji isto učiniti vama“[6]

Antoine Augustin Cournot, francuski ekonomist i matematičar 1838. u svojoj publikaciji *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses* prvi spominje koncept teorije igara analizirajući ponašanje proizvođača na tržištu s dva igrača (model duopola). Tadašnje ekonomsko ponašanje opisano pomoću teorije igara nije bilo smatrano teorijom igara, dok ga nasuprot njima današnji teoretičari svrstavaju u klasike teorije igara.

John von Neuman i Oskar Morgenstern u svojoj knjizi *Theory of games and economic behaviour* teorijom strateških igara stvaraju teoriju ekonomskog ponašanja matematički definirajući pojmove poput: igra dva igrača s nultom sumom (*two players zero sum games*), igra tri igrača s nultom sumom (*three players zero sum games*), igra četiri igrača s

---

[5] Samuelson, P.A. i Nordhaus, W.D. (2010) *Ekonomija*. MATE d.o.o., Zagreb

[6] Dixit. A. i Nalebuff. B. (1993) *Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics, and Everyday Life,* W. W. Norton & Company, USA

nultom sumom (*four players zero sum games*), kooperativne igra (*cooperative games*), koalicijski oblik igara (*coalision games*), prenosiva korisnost (*transferable utility*) te stabilni skupovi (*stable sets*) koji predstavljaju prvo predloženo rješenje za rješavanje igara s više od dva igrača. Također veliki doprinos u von Neumanovoj i Morgenstenovoj knjizi očituje se i aksiomatski definiranoj teoriji korisnosti.

Irski ekonomist i filozof Francis Ysidro Edgeworth 1881. godine u svojoj je knjizi *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences* doprinio teoriji igara razvojem krivulje ugovora (*contract curve*) kao koncepta ishoda trgovanja dva dobra među dva različita pojedinca.

2.3.1. Definicija teorije igara

Dvije su najopćije prihvaćene definicije teorije igara od kojih je prva veoma jednostavna: „Teorija igara je znanost o strateškom interaktivnom donošenju odluka“[7]

Druga, iako vođena istom logikom, ponešto je duža:

„Teorija igara analitički je alat koji nam pomaže shvatiti fenomene koje promatramo u interakciji donositelja odluka. Osnovne pretpostavke na kojima se temelji teorija igara jesu da donositelji odluka pokušavaju ostvariti dobro definirane egzogene ciljeve (racionalni su), uzimajući u obzir svoje znanje ili očekivanje o ponašanju drugih donositelja odluka (razmišljaju strateški)“[8]

2.4. Terminologija teorije igara

Kako bi se smisleno moglo analizirati probleme u okviru teorije igara potrebno je poznavanje osnovnih pojmova: igra, igrač, strategija, isplata (ishodi).

Igra je međusobna interakcija između igrača (sudionika igre), a sastoji se od skupa pravila kojih se igrači moraju držati, akcija koje igrači mogu poduzimati te interesa koje igrači nastoje ostvariti. Skup akcija (poteza) svakog igrača sačinjava igračevu strategiju uzimajući pri tome u obzir skup akcija (poteza) svih ostalih igrača.

---

[7] Dixit, A., Skeath, S. i Reiley, D.H. (2009) *Games of Strategy*. New York: W. W. Norton. 3rd edition

[8] Osborne, M. J. i Rubinstein, A. (1994) *A Course in Game Theory.* Cambridge, Massachusetts: The MIT Press

Glavni cilj teorije igara određivanje je skupa optimalnih strategija, po jednu za svakog igrača, takvog da taj skup maksimizira isplate svakog pojedinog igrača.

„Kao primjer igre mogu poslužiti tvrtke koje međusobno konkuriraju određivanjem cijena ili grupa potrošača koji se na aukciji natječu za kupnju nekog umjetničkog djela, dok je optimalna strategija ona strategija koja svakom igraču optimizira njegovu očekivanu isplatu“[9]

„Igra može reprezentirati velik broj društvenih i političkih situacija kao što su odluke da se pridruži sindikatu ili odluka države da sudjeluje u slobodnoj trgovini. U mnogim slučajevima postoji više od dva igrača što komplicira analizu.“[10]

2.5. Primjer igre: Zatvorenikova dilema

Vjerojatno i najpoznatiji primjer neke igre iz domene teorije igara je zatvorenikova dilema.

„Dvije su osobe uhićene zbog sumnje u pljačku i zatvorene u odvojene ćelije. Obojica uhićenika u poziciji su priznati ili ne priznati zločin. Državni odvjetnik objašnjava svakome od počinitelja što će se dogoditi u slučaju da (ne) priznaju zločin i nudi im nagodbu.“[11]

Tablica 1: Prikaz mogućih godina zatvora u slučaju priznavanja ili nepriznavanja zločina

Igrač A	Igrač B		
		Ne priznati	Priznati
	Ne priznati	1,1	5,0
	Priznati	0,5	3,3

Izvor: Hargreaves i Varoufakis, 2003

Tablica prikazuje koliko će godina zatvora pojedini igrač dobiti u slučaju priznavanja ii nepriznavanja zločina, odnosno kakve će biti isplate igrače ako se odluče na određenu akciju. U slučaju da oba igrača priznaju zločin, oba će dobiti 3 godine zatvora. U slučaju da niti jedan ne prizna zločin oba igrača će dobiti po 1 godinu zatvora, dok u slučaju da jedan prizna a drugi ne, onaj koji je priznao neće dobiti ništa, a onaj drugi dobiti će 5

[9] Pindyck, R.S., Rubinfeld, D.L. (2005), *Mikroekonomija,* Profil, Zagreb

[10] Jakšić, M. (1998). *Paradoksi i zagonetke u ekonomiji,* I. izdanje, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd.

[11] Hargreaves, P.S., Varoufakis, Y. (2003). *Game theory: A Critical Introduction*, Routledge, New York, NY.

godina zatvora. Igra se rješava tehnikom dominantnih strategija a u interesu oba igrača je priznati.

2.6. Klasifikacija igara

„Igra se može klasificirati prema sljedećim ključnim pitanjima:

1. Jesu li potezi u igri sekvencijalni ili simultani?
2. Jesu li interesi igrača u cijelosti konfliktni ili postoje neke zajedničke osobine?
3. Igra li se igra iz samo jednog pokušaja ili se ponavlja i jesu li protivnici isti ili se mijenjaju?
4. Jesu li igrači u potpunosti informirani i imaju li jednake informacije?
5. Jesu li pravila igre fiksa ili se njima može manipulirati?
6. Jesu li dogovori o suradnji primjenjivi?
7. Mijenja li identitet igrača igru u kojoj taj igrač sudjeluje?“[12]

U radu će naglasak biti na klasifikaciji igara u ovisnosti o tome jesu li potezi u igri istovremeni ili naizmjenični, jesu li igrači u potpunosti informirani te dolazi li do asimetričnosti informacija.

Ovisno o tome povlače li igrači svoje poteze istovremeno ili naizmjenično, igre se dijele na statične odnosno simultane i dinamične odnosno sekvencijalne igre.

Igrači u igri mogu biti potpuno i nepotpuno informirani, informacije mogu biti savršene i nesavršene, a asimetričnost informacija javlja se u situaciji kada su jednom igraču dostupne informacije koje nisu dostupne drugom igrač. Potpune informacije znače da svaki igrač zna funkciju isplata (*eng. payoff function*), odnosno isplate i strategije svih drugih igrača, dok nepotpune informacije znače da barem jedan igrač nije siguran u isplatu ili strategiju barem jednog od preostalih igrača u igri.

Savršene informacije znače da igrač u određenom potezu zna cijelu povijest igre, odnosno sve poteze koje su do tog trenutka svi igrači povukli.

[12] Dixit, A., Skeath, S. i Reiley, D.H. (2009) Games of Strategy. New York: W. W. Norton. 3rd edition

U okviru ova dva istaknuta pitanja igre se mogu podijeliti na statične igre s potpunim informacijama, dinamične igre s potpunim informacijama, statične igre s nepotpunim informacija i dinamične igre s nepotpunim informacijama. Nadalje, dinamične igre s potpunim informacijama mogu se podijeliti na igre s potpunim i savršenim informacija te igre s potpunim i nesavršenim informacijama.

Dinamična igra s potpunim i savršenim informacijama ona je igra u kojoj igrači svoje poteze vuku naizmjenično te su svim igračima poznate isplate i strategije odnosno funkcije isplata ostalih igrača i cijela povijest igre odnosno svi potezi koje su igrači povukli do određenog trenutka u igri.

Dinamična igra s potpunim i nesavršenim informacijama ona je igra u kojoj igrači svoje poteze vuku naizmjenično te su svim igračima poznate funkcije isplata ostalih igrača ali barem jednom igraču nije poznat barem jedan potez jednog od preostalih igrača u igri.

S druge strane sve statične igre su igre s nesavršenim informacijama.

„U igrama sa simultanim potezima igrači nemaju informacije o tome što su njihovi protivnici odigrali. Razlog je tome što se potezi povlače istovremeno iako simultanim igrama nazivamo i one igre u kojima se potezi ne povlače u isto vrijeme, ali igrači svoje poteze povlače u izolaciji i ne znaju što je njihov protivnik odigrao ili će odigrati. Zato su sve simultane igre ujedno i igre s nesavršenim informacijama“[13]

Analitički gledano, statične igre ujedno su i najjednostavnije, dok dodavanjem dinamike igre postaju složenije.

2.6.1. Statične igre s potpunim informacijama

Statične igre s potpunim informacijama, one su igre u kojima igrač zna isplate i strategije ostalih igrača, a igrači svoje poteze povlače istovremeno.

Jednostavan primjer statične igre s potpunim informacijama je kazneni udarac u nogometu. Igru igraju dva igrača: golman i izvođač kaznenog udarca. Strategije izvođača kaznenog udarca su pucati desno od golmana, pucati lijevo od golmana ili pucati po sredini, a isplata

[13] Kopal, R. i Korkout, D. (2012) *Uvod u teoriju igara*, Visoko učilište Effectus – visoka škola za financije i pravo, Zagreb

pucača je postignuti pogodak. Golmanove strategije su baciti se u lijevu stranu, baciti se u desnu stranu ili ostati na sredini, a golmanova isplata je obranjeni kazneni udarac. Kako su i golmanu i igraču poznate strategije i isplate protivnika, radi se o igri s potpunim informacijama. Nadalje, pravilo igre nalaže kako se golman ne smije maknuti s gol linije prije nego što igrač izvede kazneni udarac, a ako se s linije makne prekasno neće stići na vrijeme reagirati. Dakle, potezi se povlače istovremeno i stoga se radi o statičnoj igri.

2.6.1.1 Općeniti zapis statične igre s potpunim informacijama

Općeniti zapis igre uključuje broj igrača, strategije (skup poteza) svakog igrača te isplate svakog igrača. Takav zapis igre još se naziva normalnim ili strateškim oblikom igre, a prikazuje se tablicama isplata ili matricama.

Igra je skup interakcija između sudionika, odnosno igrača, po određenim pravilima i s određenim ishodom. Strategija je skup akcija igrača, skup strategija još se naziva i strateškim prostorom, a isplata se još se naziva i funkcijama isplata zato što skupu akcija pridodaje određenu vrijednost, odnosno isplatu.

„Neka broj igrača bude označen s $\boldsymbol{n}$, igrači oznakama od $\boldsymbol{1}$ do $\boldsymbol{n}$, a proizvoljni igrač s $\boldsymbol{i}$. Neka $\boldsymbol{S_i}$ bude skup strategija i-tog igrača, a $\boldsymbol{s_i}$ proizvoljna strategija i-tog igrača. Vrijedi zapis $s_i \in S_i$. Neka $\boldsymbol{u_i (s_1,\ldots,s_n)}$ bude funkcija isplata i-tog igrača za odigranu kombinaciju strategija $\boldsymbol{(s_1,\ldots,s_n)}$. Uz sve navedeno igra u normalnom obliku može biti predstavljena s $\boldsymbol{G = \{ S_1,\ldots,S_n ; u_1,\ldots, u_n \}}$ “[14]

Ovakav zapis igre može se upotrijebiti i kod sekvencijalnih igara.

2.6.1.2 Nashova ravnoteža

Zajednički nazivnik svih koncepata rješenja, pa tako i Nashove ravnoteže jest to da igrač pri donošenju odluke u igri uzima u obzir odluke drugih igrača te gradi strategiju koja je najbolji odgovor na pretpostavljene strategije svih drugih igrača.

Dobar primjer za odabir poteza na osnovu pretpostavljanja poteza drugog igrača jest šah (iako šah nije statična igra). Šah je kompleksna igra s puno mogućnosti, nema utjecaja sreće i nema asimetričnosti informacija. Pobjeda u šahu najviše ovisi o mogućnosti predviđanja poteza suparničkog igrača i izradi vlastite strategije u skladu s tim

[14] Gibbons, R. 1992, *Game theory for applied economists,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey

predviđanjem, odnosno s porastom broja predviđenih poteza raste i vjerojatnost pozitivnog ishoda.

Postoji trenutak u igri u kojem majstor u šahu točno zna koje poteze treba odigrati kako bi došao do pobjede. Skup tih poteza jest strategija, a ako se ta strategija smatra jedinstvenom strategijom koja vodi do maksimalne očekivane isplate (pobjede), tada se ta strategija naziva Nashovom ravnotežom.

Kasnije u radu istaknuti će se pojačanje koncepata ravnoteže, zato što Nashova ravnoteža kao koncept ravnoteže neće biti „dovoljna" za rješavanje igara kompleksnijih od šaha.

„Šah nije igra. Šah je dobro definirani oblik izračunavanja. Možda nećete uspjeti doći do odgovora, ali u teoriji mora postojati rješenje, pravi potez u svakoj poziciji. Prave igre nisu takve. Stvarni život nije takav. Stvarni život sastoji se od blefiranja, taktike varanja, propitivanja samog sebe o tome što onaj drugi misli da sam ja mislio napraviti. I to su igre u mojoj teoriji."[15]

Ako teorija igara može ponuditi jedinstvenu strategiju kao rješenje neke igre, onda je ta strategija Nashova ravnoteža. Pretpostavlja se da teorija igara može predvidjeti jedinstvenu strategiju koju će igrač u nekoj igri koristiti. Kako bi ta predikcija bila točna, potrebno je da svaki igrač koristi strategiju koju je predvidjela teorija. Strategija pojedinog igrača najbolji je odgovor na pretpostavljene strategije svih drugih igrača.

Definicija Nashove ravnoteže:

„U igri u normalnom obliku $\boldsymbol{G = \{ S_1,\ldots,S_n ; u_1,\ldots, u_n \}}$, strategije $\boldsymbol{(s_1^*,\ldots,s_n^*)}$ jesu **Nashova ravnoteža** ako za svakog igrača $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{s_1^*}$ je barem toliko dobar odgovor igrača $\boldsymbol{i}$ na specifične strategije drugih $n - 1$ igrača, $\boldsymbol{(s_1^*,\ldots,s^*_{i-1},s^*_{i+1},s_n^*)}$:

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots s_n^*) \tag{1}$$

za svaku izvedivu strategiju $\boldsymbol{s_i} \in \boldsymbol{S_i}$ postoji $\boldsymbol{s_i^*}$ takav da rješava $\boldsymbol{s^*_{i-1}}$

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots s_n^*)\text{“}^{16} \tag{2}$$

[15] Poundstone, W. (1992) Prisoner's Dilemma. New York: Doubleday

[16] Gibbons, R. 1992, *Game theory for applied economists,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey

U svome radu 1950. godine američki matematičar John Forbes Nash je pokazao da svaka igra s konačnim brojem igrača i konačnim setom strategija ima Nashovu ravnotežu.

2.6.2. Dinamičke igre s potpunim informacijama

U prethodnom poglavlju, kao primjer igre u kojoj igrač donosi odluku uzimajući u obzir odluke drugih igrača, analiziran je šah. Po vrsti poteza (naizmjenično ili istovremeno) šah spada u dinamičke igre s potpunim informacijama jer igrači povlače poteze zadanim redoslijedom (jedan pa drugi) i svim su igračima dostupne informacije o povijesti cijele igre (poznati svi potezi koje su igrači u igri odigrali).

Dinamičke igre prikazuju se ekstenzivnim oblikom igre koje se sastoji od igrača, poteza i isplata, a kao koncept rješenja koristi se povratna indukcija.[17]

Povratna indukcija podrazumijeva metodu kojom igrači ostvaruju ravnotežnu strategiju tako da analizu započnu na zadnjem čvoru, odnosno potezu igre, a s ciljem predviđanja strategija drugih igrača. Skup ravnotežnih strategija dinamičkih igara s potpunim informacijama naziva se savršenom Nashovom ravnotežom podigre.

Općenito gledano, centralni problem svih dinamičkih igara je vjerodostojnost. S obzirom na to da igrači prilikom kreiranja vlastite optimalne strategije moraju u obzir uzeti poteze i akcije drugih igrača moguće je da si igrači međusobno prijete i obećaju kako bi obmanuli protivnika odnosno naveli ga na odabir neoptimalne strategije.

2.6.3. Statičke igre s nepotpunim informacijama

Razlika između igara s potpunim i igara s nepotpunim informacijama je u tome što u igrama s nepotpunim informacijama barem jednom igraču nije poznata funkcija isplata barem jednog od preostalih igrača.

Dobar primjer statičke igre s nepotpunim informacijama je aukcija sa zapečaćenim ponudama (*seal-bid auction*). U toj aukciji svaki ponuditelj za sebe, ne znajući ponude drugih, predaje ponudu za procijenjenu vrijednost proizvoda.

S obzirom na nedostatak informacija, igrači prilikom kreiranja optimalnih strategija moraju kreirati vjerovanja o odabirima strategija drugih igrača, te koncept Nashove ravnoteže kao

---

[17] Dixit, A., Skeath, S. i Reiley, D.H. (2009) *Games of Strategy*. New York: W. W. Norton. 3rd edition

takav nije dovoljno snažan da bi se njime rješavale statične igre s nepotpunim informacijama. Prošireni koncept koji se koristi u statičkim igrama s nepotpunim informacijama naziva se Bayesova ravnoteža, a ona je najbolji odgovor jednog igrača na strategije drugih igrača u skladu s vjerovanjima o tipovima drugih igrača.

2.7. Proširenje koncepata rješenja

Koncept rješenja neke igre podrazumijeva skup strategija, po jednu za svakog igrača, takav da niti jedan igrač nema potrebe za promjenom strategije, odnosno takav skup strategija u kojem je igračeva strategija najbolji odgovor na strategije ostalih igrača u igri.

Dakle, sukladno podijeli igara na dinamične i statične, s potpunim i nepotpunim informacijama postoje četiri različita koncepta rješenja:

„Nashova ravnoteža za statične igre s potpunim informacijama, Savršena Nashova ravnoteža podigre za dinamične igre s potpunim informacijama, Bayes Nashova ravnoteža za statične igre s nepotpunim informacijama te Savršena Bayesova ravnoteža za dinamične igre s nepotpunim informacijama“ [18]

S obzirom na to da su se u sklopu teorije igara sukladno razvoju te grane znanosti počele promatrati situacije koje se više nisu mogle opisati kao igre u kojima igrači svoje poteze povlače istovremeno i situacije u kojima igrači više ne posjeduju jednake informacije, igre su postale kompleksnije, postali su kompleksniji zahtjevi za njihovim rješavanjem, a posljedično koncepte rješenja koji se koriste u jednostavnijim igrama bilo je potrebno „doraditi“ kako se neoptimalne strategije ne bi nalazile u ravnoteži igre.

Dakle, Bayes Nashova ravnoteža (Bayesova ravnoteža) kao koncept rješenja statičnih igara s nepotpunim informacijama nastala ja kao „dorada“ Nashove ravnoteže koja se koristila kao koncept rješenja za statične igre s potpunim informacijama tako da se igračeva optimalna strategija prilagodila s obzirom na posteriorna vjerovanja igrača o signalima poslanih od strane ostalih igrača u igri.

[18] Gibbons, R. 1992, *Game theory for applied economists,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey

Jednako tako savršena Nashova ravnoteža podigre nastala je kao „dorada“ Nashove ravnoteže, dok je savršena Bayesova ravnoteža nastala kao „dorada“ savršene Nashove ravnoteže podigre i Bayes Nashove ravnoteže.

Razlika između igara s potpunim i igara s nepotpunim informacijama (osim temeljne koja se podrazumijeva u samom nazivu) jest i u definiranju podigre (dio igre koji počinje u čvoru koji nije početni a završava na kraju igre). Predefinirajući podigru jednostavno kao nastavak igre odnos između dinamičnih igara s potpunim informacijama i statičnih igara s potpunim informacijama postaje ekvivalentan odnosu dinamičnih igara s nepotpunim informacijama i statičnih igara s nepotpunim informacijama. Jednako kao i kod dinamičnih igara s potpunim informacijama, dinamične igre s nepotpunim informacijama sadržavat će savršenu Bayesovu ravnotežu ako svi dijelovi igre sadrže Bayes Nashovu ravnotežu. Dakle, koncept savršene Bayesove ravnoteže u dinamičnim igrama s nepotpunim informacijama jednak je konceptu Bayes Nashove ravnoteže u statičnim igrama s nepotpunim informacijama, konceptu savršene Nashove ravnoteže podigre za dinamične igre s potpunim informacijama te konceptu Nashove ravnoteže za statične igre s potpunim informacijama.

Kada igre postaju dinamične i kada se potezi vuku naizmjenično igrači u sklopu svojih poteza dobivaju jednu dodatnu mogućnost: oni mogu prijetiti i obećavati da će u određenom trenutku u igri odigrati određeni potez kako bi protivničkog igrača naveli da ne odigra onaj potez koji je za njih nepogodan. S obzirom na to da igrači prilikom odabira ravnotežne strategije u obzir uzimaju i sve akcije i mogućnosti drugih igrača, te pod pretpostavkom da neće uvijek sva obećanja i sve prijetnje biti ostvarene, ravnotežna strategija mora sadržavati i poteze koji možda neće uopće tijekom igre biti igrani (ako prvi igrač shvati prijetnju kao ozbiljnu drugi je možda ni neće morati ostvariti). Problem koncepta Nashove ravnoteže nastaje iz razloga što igrači mogu davati neuvjerljive prijetnje, odnosno prijetnje koje ne bi ostvarili kada bi došli na potez, a drugi igrači, s obzirom na nedostatak informacija ne mogu procijeniti ozbiljnost obećanja i prijetnji. Kako ravnotežna strategija mora sadržavati poteze koji su najbolji potezi (odgovori) u svim trenutcima u igri, ona ne može sadržavati poteze koji su odgovori na prijetnje koje se neće ostvariti. Nadalje, kako se radi o igrama s potpunim informacijama za razliku od igara s nepotpunim informacijama, svaki igrač zna koje su prijetnje (i obećanja) uvjerljive a koje nisu, odnosno on za isplati li se racionalnom igraču ostvariti prijetnju ili ne. Rješavajući dinamičnu igru s potpunim informacijama pomoću koncepta Nashove ravnoteže, prijetnje će biti sadržane u ravnotežnim strategijama zato što igrač koji igru igra prema Nashovoj ravnoteži ne uzima u obzir saznanja (na osnovu potpunih informacija) o tome koje će se prijetnje ostvariti a koje neće. Međutim, rješavajući igru povratnom indukcijom pronalazi se jedinstvena savršena Nashova ravnoteža podigre te dolazi do eliminacije neuvjerljivih prijetnji i obećanja. Dakle, s obzirom na to da je centralni problem svih dinamičnih igara vjerodostojnost, uveden je koncept savršene Nashove ravnoteže podigre kao pojačanje koncepta Nashove ravnoteže a s ciljem rješavanja problema vjerodostojnosti (prijetnje i obećanja).

U svojoj suštini oba su koncepta jednaka jer da bi igra imala savršenu Nashovu ravnotežu podigre (zapravo cijele igre, ali općeprihvaćeni naziv ravnoteže u sebi sadrži naziv podigra) svaka podigra mora u sebi sadržavati Nashovu ravnotežu podigre. Drugim riječima, ravnoteža dinamične igre s potpunim informacijama pronalazi se tako da se pronalazi Nashova ravnoteža svake zasebne podigre.

Nadalje, koncept savršene Nashove ravnoteže podigre nije dovoljan za rješavanje dinamičnih igara s nepotpunim informacijama. Kao što je istaknuto, u igrama s potpunim informacijama, moguće je da igrač procijeni koje su prijetnje njegovog suparnika uvjerljive a koje nisu. Međutim u igrama s nepotpunim informacijama nije moguće pretpostaviti da igrač može razlikovati uvjerljive od neuvjerljivih prijetnji (radi nedostupnosti svih informacija). Stoga je potrebno proširiti koncept savršene Nashove ravnoteže podigre u koncept savršene Bayesove ravnoteže.

Kako bi se navedeni koncept proširio za početak je potrebno definirati igračev informacijski skup:

„Informacijski skup nekog igrača skup je čvorova odluke koji zadovoljavaju zahtjeve:

1) igrač vuče potez na svakom čvoru informacijskog skupa
2) kada se igra nalazi u čvoru informacijskog skupa, igrač na potezu ne zna na kojem se čvoru informacijskog skupa nalazi“[19]

Također, informacijski skup potrebno je podijeliti na jedinstveni i ne jedinstveni informacijski skup. Podjela skupova na jedinstveni i ne jedinstveni u svojoj suštini je drugačiji način definiranja savršenih i ne savršenih informacija.

---

[19] Gibbons, R. 1992, *Game theory for applied economists,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey

„Savršene informacije znače da je svaki informacijski skup jedinstveni, dok ne savršene informacije znače da postoji barem jedan ne jedinstveni informacijski skup“[20]

Nadalje, nakon definiranog informacijskog skupa moguće je definirati zahtjeve (eng. *requirements*) koji koncept savršene Nashove ravnoteže podigre dorađuju u koncept savršene Bayesove ravnoteže.

„*Zahtjev 1*: U svakom informacijskom skupu, igrač koji je na potezu mora imati vjerovanje o tome koji čvor u informacijskom skupu je dosegnut. Za ne jedinstvene informacijske skupove, vjerovanje predstavlja pridruženu distribuciju vjerojatnosti nad čvorovima informacijskog skupa, dok za jedinstvene informacijske skupove vjerovanje predstavlja pridruženu vjerojatnost jednaku 1 nad jedinstvenim čvorom odluke.

Zahtjev 2: Uzimajući u obzir vjerovanja igrača, strategije igrača moraju biti sekvencionalno racionalne. Sekvencionalna racionalnost znači da na svakom informacijskom skupu, akcija koju je igrač na potezu izabrao mora biti optimalna s obzirom na igračeva vjerovanja (i sljedstvene strategije igrača) u sklopu tog informacijskog skupa i uzimajući u obzir sljedstvene strategije drugih igrača. Pod pojmom sljedstvene strategije (eng. *subsequent strategy*) podrazumijeva se kompletan plan akcija koji pokriva svaku ne predviđenu situaciju koja bi se mogla desiti nakon što je dosegnut određeni informacijski skup“[21]

Dakle, *Zahtjev 1* konstruira koncept savršene Bayesove ravnoteže na način da uklanja stratešku nesigurnost, odnosno kada igrač nije siguran koje je poteze njegov protivnik igrao ranije tijekom igre tada pridodaje vjerojatnosti svakom mogućem potezu koji je odigran. *Zahtjev 2* zapravo govori o tome da igrač pri odabiru ravnotežne strategije uzima u obzir vjerojatnosti (vjerovanja) koja je pridao svakom mogućem potezu koji je odigran.

Nadalje, kako bi se u potpunosti konstruirala Bayesova ravnoteža potrebno je uvesti dodatna 2 ograničenja koja utječu na vjerovanja igrača u smislu da igrači ne samo da djeluju u skladu s vjerovanjima već i da vjerovanja nastaju u skladu s Bayesovim pravilom i ravnotežnim strategijama.

---

[20] Gibbons, R. 1992, *Game theory for applied economists,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey

[21] Gibbons, R. 1992, *Game theory for applied economists,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey

„Zahtjev 3: U informacijskim skupovima koji se nalaze na ravnotežnoj putanji, vjerovanja su određena Bayesovim pravilom i ravnotežnim strategijama.

Zahtjev 4: U informacijskim skupovima koji se ne nalaze na ravnotežnoj putanji, vjerovanja su određena Bayesovim pravilom i ravnotežnim strategijama.“[22]

Savršena Bayesova ravnoteža onaj je skup strategija i vjerovanja koji zadovoljavaju navedena 4 zahtjeva. Također i u drugoj literaturi pronalazi se jednaka definicija:

„Savršena Bayesova ravnoteža kombinacija je strategija i vjerovanja takva da strategije igrača specificiraju akcije koje su uvjetovane njihovim tipom, čine Nashovu ravnotežu s obzirom na vjerovanje igrača i specificiraju poteze koji su najbolji odgovori u svakoj podigri; vjerovanja igrača konzistentna su s ravnotežnim strategijama igrača i njihovim zajedničkim početnim vjerovanjima, te su, gdje je to moguće, ažurirana primjenom Bayesova pravila.“[23]

2.8. Formalni zapis signalne igre

Prema Gibbonsu formalni matematički zapis signalne igre jest sljedeći:
„Signlalna igra je dinamička igra s nepotpunim informacijama. U igri sudjeluju 2 igrača. Bolje informirani igrač naziva se *Pošiljatelj* (*Sender – S)* a slabije informirani igrač naziva se *Primatelj* (*Receiver* – R).
Tok igre je sljedeći:

1) Priroda određuje t_i iz *Pošiljateljevog* skupa $T = \{t_1, \dots, t_I\}$ prema distribuciji vjerojatnosti:

   $p(t_i),\ p(t_i) > 0\ za\ svaki\ i\ te\ vrijedi\ p(t_1) + \cdots + p(t_I) = 1.$

2) *Pošiljatelj* promatra t_i i onda određuje poruku s_j iz skupa

   $S = \{s_1, \dots, s_J\}.$

[22] Gibbons, R. 1992, *Game theory for applied economists,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey

[23] Carmichael, F. (2005) *A Guide to Game Theory*. Financial Times/Prentice Hall; 1st edition

3) *Primatelj* promatra s_j te onda bira akciju d_k iz skupa

$D = \{d_1, \ldots, d_K\}$.

4) Isplate igračima su sljedeće: $U_M(t_i, s_j, d_k)$ i $U_I(t_i, s_j, d_k)$“[24]

Prema istom autoru, ranije izneseni zahtjevi signalne igre (eng. *signaling requirements*) u formalnom matematičkom zapisu su sljedeći:

„*Zahtjev 1:* Nakon promatranja poruke s_j iz skupa *S, Primatelj* kreira vjerovanja o tome koji tip je mogao poslati poruku. Neka vjerovanja budu obilježena s funkcijom vjerojatnosti $\mu(t_i \mid s_j)$, gdje vrijedi $\mu(t_i \mid s_j) \geq 0$ za svaki t_i iz *T,* i

$$\sum_{t_i \in T} \mu(t_i \mid s_j) = 1 \tag{3}$$

Zahtjev 2 Primatelj: Za svaki s_j iz skupa *S, Primateljeva* akcija $d^*(s_j)$ maksimizira *Primateljevu* očekivanu isplatu u skladu s vjerovanjem $\mu(t_i \mid s_j)$ o tome koji tip je poslao poruku m_j. Odnosno, $d^*(s_j)$ riješava jednadžbu:

$$\max_{d \in D} \sum_{t_i \in T} \mu(t_i \mid s_j) U_R(t_i, s_j, d_k) \tag{4}$$

Zahtjev 2 Pošiljatelj: Za svaki t_i iz skupa *T, Pošiljateljeva* poruka $s^*(t_i)$ maksimizira *Pošiljateljevu* očekivanu isplatu u skladu s *Primateljevom* porukom $d^*(s_j)$. Odnosno $s^*(t_i)$ riješava jednadžbu:

$$\max_{s_j \in S} U_S(t_i, s_j, d^*(s_j)) \tag{5}$$

Zahtjev 3: Za svaki s_j iz skupa *S,* ako postoji t_i iz skupa *T,* takav da $s^*(t_i) = s_j$, onda *Primateljeva* vjerovanja u informacijskom skupu koja odgovaraju m_j moraju biti u skladu s Bayesovim pravilom i *Pošiljateljevom* strategijom:

[24] Gibbons, R. 1992, *Game theory for applied economists,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey

$$\mu(t_i \mid s_j) = \frac{p(t_i)}{\sum_{t_i \in T} p(t_i)} \tag{6}$$

Nadalje, kako bi formalni zapis bio konačan potrebno je definirati *Primateljeve* i *Pošiljateljeve* strategije:

„*Pošiljateljeva strategija 1:* Igrati s_1 ako priroda odredi t_1 i igrati s_1 ako priroda odredi t_2.
Pošiljateljeva strategija 2: Igrati s_1 ako priroda odredi t_1 i igrati s_2 ako priroda odredi t_2.
Pošiljateljeva strategija 3: Igrati s_2 ako priroda odredi t_1 i igrati s_1 ako priroda odredi t_2.

Pošiljateljeva strategija 4: Igrati s_2 ako priroda odredi t_1 i igrati s_2 ako priroda odredi t_2.
Primateljeva strategija 1: Igrati d_1 ako *Pošiljatelj* odigra s_1 i igrati d_1 ako *Pošiljatelj* odigra s_2.
Primateljeva strategija 2: Igrati d_1 ako *Pošiljatelj* odigra s_1 i igrati d_2 ako *Pošiljatelj* odigra s_2.
Primateljeva strategija 3: Igrati d_2 ako *Pošiljatelj* odigra s_1 i igrati d_1 ako *Pošiljatelj* odigra s_2.
Primateljeva strategija 4: Igrati d_2 ako *Pošiljatelj* odigra s_1 i igrati d_2 ako *Pošiljatelj* odigra d_2.“[25]

Pošiljateljeva strategija 1 i *Pošiljateljeva strategija 4* nazivaju se ravnotežom udruživanja (eng. *pooling*) zato što ne vezano za potez prirode *Pošiljatel*j uvijek igra istu strategiju. Može se reći da on može odigrati svoj potez ne promatrajući potez prirode. Igrač igra s_1 ne vezano je li priroda odredila t_1 ili t_2, odnosno igra s_2 nevezano je li priroda odredila t_1 ili t_2.

Pošiljateljeva strategija 2 i *Pošiljateljeva strategija 3* nazivaju se ravnotežom razdvajanja (eng. *separating*) jer se potez igrača razlikuje od poteza prirode. Igrač igra s_1 ako priroda odigra t_2, odnosno s_2 ako je priroda odigrala t_1.

[25] Gibbons, R. 1992, *Game theory for applied economists,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey

3. Analitička analiza problema

3.1. Definiranje problema

„Veliki je broj tržišta koja karakterizira razlika u informacijama koje posjeduju kupac i prodavač.“[26]

Problem koji je česta pojava u području korporativnih financija i investicijskog odlučivanja za vrijeme situacije kada tvrtka, odnosno menadžment tvrtke, ima na raspolaganju informacije koje investitori nemaju, prvi su u svom radu *Corporate financing and investment decisions when firms have information that investors do not have* iz 1984. analitički obradili Stewart C. Myers i Nicholas S. Majluf. Analiza koja slijedi motivirana je njihovim radom, ali kut promatranja približen je teoriji igara. Temelje takve analize dao je Robert Gibbons u svojoj knjizi *Game Theory for Applied Economists* iz 1992., a sam problem je predstavljen kao signalna igra dva igrača u kojoj je menadžer poduzeća bolje informirani igrač dok je potencijalni investitor slabije informirani igrač.

Rad analizira tvrtku koja mora emitirati dionice (*common stock*[27]*)*, odnosno dati udio u tvrtki u zamjenu za gotov novac kako bi prikupila novčana sredstva potrebna za financiranje projekta s pozitivnom čistom sadašnjom vrijednošću.

„Dionice se mogu definirati kao pisane isprave o uloženim sredstvima u vlasnički kapital dioničkog društva (korporacije)…To su dugoročni vrijednosni papiri, a ujedno i permanentni vrijednosni papiri.“[28]

---

[26] 15. Pyle, D.H. i Leland, H.E. (1977) *Informational asymmetries, financial structure and financial intermediation*. The Journal of Finance, American Finance Association

[27] John J. Hampton (1976), *Financial Decision Making, Concepts, Problems & Cases*, drugo izdanje, Reston Publishing Company, Reston, Virginia

[28] Orsag, S. (2003) *Vrijednosni papiri.* Sarajevo. Revicon

3.2. Pretpostavke modela

U poslovnom okruženju racionalni sudionici interakcije nastoje ostvariti svoje interese. Uz različite interese sudionici također posjeduju i različite informacije. Za vrijeme ekonomskih aktivnosti poduzeća realno je očekivati da će doći do situacije kada menadžeri poduzeća i potencijalni investitori posjeduju različite informacije o sadašnjoj vrijednosti tvrtke ali jednako tako i o vrijednostima budućih projekata. Nadalje, svaki pojedinac individualno procjenjuje koje informacije će otkriti drugom sudioniku kako ne bi izgubio poziciju povlaštenog položaja koji mu te informacije donose.

Prva pretpostavka modela jest da menadžer poduzeća posjeduje određene informacije koje ne posjeduje potencijalni investitor (kasnije u tekstu jasno će se dati do znanja tko u kojem trenutku posjeduje kakve informacije). Posjedovanje informacija menadžera poduzeća stavlja u položaj informacijske prednosti. Sukladno tome, u igri će doći do trenutka kada će menadžer poduzeća određene informacije htjeti otkriti potencijalnom investitoru, ali jednako tako doći će i do trenutka kada će menadžeru poduzeća u interesu biti sakriti određene informacije od potencijalnog investitora. Dakle, menadžer poduzeća odlučuje o tome koje će informacije otkriti potencijalnom investitoru, a potencijalni investitor na osnovu toga što zna da menadžer poduzeća posjeduje više informacija od njega s posebnom pozornošću proučava svaki potez koji menadžer povlači. Iz toga razloga, odabirom određenog poteza menadžer šalje tržištu odnosno investitoru određeni signal. Na osnovu percipiranja poteza protivnika kao određenog signala, ovakav tip dinamične igre dobio je naziv signalna igra.

„Ako menadžment poduzeća posjeduje insajderske informacije o poduzeću mora biti slučaja u kojima im te informacije omogućavaju povlašteni položaj“[29]

Druga pretpostavka modela je da poduzeće u svojem vlasništvu ima imovinu određene vrijednosti. Neka novčana vrijednost te imovine bude označena slovom a.

Treća pretpostavka modela je da je poduzeće na tržištu prepoznalo priliku za investiranjem u novi projekt. Neka zahtijevana vrijednost investicije bude označena s I. Čista sadašnja vrijednost projekta neka bude označena slovom b. Prije investicije u novi projekt

---

[29] Myers, S.C. i Majluf, N.S. (1984) *Corporate financing and investment decisions when firms have information that investors do not have*. MIT, Cambridge, USA

vrijednost poduzeća iznosi *a*, a u slučaju da se menadžment odluči za investiciju vrijednost poduzeća iznositi će $a + b + I$.

Zahtijevana vrijednost investicije *I*, kao i vrijednost imovine poduzeća *a* i čista sadašnja virjednost novog projekta *b* dio su općeg znanja (eng. *common knowledge*). Opće znanje podrazumijeva da su informacije sadržane u njemu poznate svim igračima, ali jednako tako i da su svi igrači upoznati s tim da kako je da informacije dostupna svima. Dakle menadžeru poduzeća dostupna je zahtijevana vrijednost investicije, zahtijevana vrijednost investicije dostupna je i potencijalnom investitoru, a i menadžer poduzeća i potencijalni investitor znaju da je zahtijevana vrijednost investicije dostupna i jednom i drugom igraču.

Također u model je, za razliku od rada Myersa i Majlufa, a po uzoru na Roberta Gibbonsa uključena i alternativna stopa povrata *r* koja je dio općeg znanja i kao takva dostupna i menadžeru poduzeća i potencijalnom investitoru.

Četvrtka pretpostavka modela podrazumijeva da novi projekt može biti investiran davanjem udjela poduzeća, odnosno emisijom dionica ili gotovim novcem koje poduzeće posjeduje. Vrijednost gotovog novca neka bude označena sa *S*, a vrijednost potrebnih dodatnih financijskih sredstava neka bude označena *E*. Nadalje, zahtijevana vrijednost investicije mora biti jednaka zbroju gotovog novca na računu tvrtke i potrebnih dodatnih financijskih sredstava: $I = E + S$.

Nadalje, pretpostavlja se nejednakost $0 \leq S \leq I$. U slučaju da pretpostavljena nejednakost ne vrijedi tvrtka ima dovoljno gotovog novca za financiranje potencijalne investicije i nema potrebe za traženjem potencijalnog investitora.

Neka vrijedi trenutno vrijedi pretpostavka: $S = 0$. Dakle vrijedi $I = E$.

Posljednja pretpostavka podrazumijeva da se vrijednost projekta računa pomoću koncepta čiste sadašnje vrijednosti. Čista sadašnja vrijednost koncept je na osnovu kojeg investitor procjenjuje isplativost određene investicije. Radi se o sumi diskontiranih svih budućih novčanih tokova. Matematički zapis je sljedeći:

$$S_0 = \sum_{t=0}^{T} \frac{V_t}{(1+k)^t} \qquad (7)$$

3.3. Harsanyijeva transformacija

Kako je ideja ovoga rada da se predstavljeni problem analizira u okviru teorije igara, kao dinamična igra s potpunim ali nesavršenim informacijama, potrebno je uvesti još jedan pojam iz te domene koji se naziva Harsanyijeva transformacija.

Harsanyijeva transformacija nazvana je po američko-mađarskom ekonomistu Johnu Harsanyiu koji je 1976. godine osmislio metodu transformacije igara s nepotpunim informacijama u igre s potpunim, ali nesavršenim informacijama tako da je kao dodatnog igrača uveo prirodu.

„Postupak uvođenja prirode kao igrača naziva se Harsanyijevom transformacijom igre s nepotpounim informacijama u igru s nesavršenim informacijama, odnosno Bayesovu igru u kojoj:

1) Priroda povlači prvi potez odabirući realizaciju slučajnih varijabli (jedne za svakog igrača) koje se nazivaju tipovima, a te slučajne varijable karakteriziraju funkcije isplate svakog igrača
2) Svaki od igrača može vidjeti realizaciju vlastitih slučajnih varijabli (vlastitog tipa), a ta slučajna varijabla sumira sve njegove skrivene informacije (tj. sve što on zna, a što nije opće zna)

Pojednostavljeno rečeno, Harsanyijeva transformacija podrazumijeva uvođenje prirode koja povlači prvi potez i kojim određuje tip igrača 1, čime se nepotpune informacije igrača 2 o isplatama igrača 1 transformiraju u nesavršene informacije o potezu prirode“ [30]

U ovome radu funkcija prirode jednaka je funkciji tržišta koje određuje početna stanja igrača (tipove igrača) na način da definira vrijednost poduzeća (a) te čistu sadašnju vrijednost projekta (b).

3.3.1. Primjer Harsanyijeve transformacije i Bayesovog teorema

Dobar primjer Harsanyijeve transformacije je djelitelj karata u pokeru. Djelitelj karata u analizi zauzima ulogu prirode (sreće) koja određuje početno stanje svakog igrača. Nadalje, s obzirom na to da svi igrači znaju koliko je karata u špilu oni određenoj karti pridodaju

[30] Kopal, R. i Korkut, D. (2014) *Uvod u teoriju igara*. Zagreb. Visoko učilište Effectus

određenu vjerojatnost, odnosno određuju vjerojatnost s kojom će djelitelj podijeliti određenu kartu. Kasnije u radu spomenuti će se Bayesov teorem (Bayesovo pravilo) koji govori o uvjetnoj vjerojatnosti, odnosno kolika je vjerojatnost nastajanja nekog događaja uz uvjet da se prije njega dogodio neki drugi događaj.

Primjera radi, vjerojatnost da će se iz špila karata od 52 karte izvući as (kojih je u špilu 4) je 4/52, odnosno 8%. Ako je prva karta koju je djelitelj podijelio as, vjerojatnost da će as doći u drugoj jest 3/51, odnosno 6%. S obzirom na to da se radi o dva uvjetovana događaja odnosno potrebno je da se dogodi prvi kako bi dogodio drugi, vjerojatnost da će neki igrač dobiti dva asa jest 4/52*3/51, odnosno 0,45%.

Svaki igrač za sebe, na osnovu informacija koje posjeduje, računa vjerojatnosti određenog poteza prirode. Kod računanja vjerojatnosti određenog poteza prirode do izražaja dolazi asimetričnost informacija. U interesu igrača je da zna karte koje posjeduje njegov protivnik, odnosno koje je tipove priroda odredila. Na taj način igrač može procijeniti rizik igranja određenog poteza, dok se Arrow Pratovom mjerom disperzije rizika može procijeniti koliki rizik je određeni igrač spreman preuzeti te na taj način odrediti, odnosno predvidjeti kakav će potez određeni igrač povući.

Ako je on tijekom drugog dijeljenja dobio asa, vjerojatnost da je njegov protivnik u istom tom dijeljenu dobio asa više nije 3/51, nego 2/51. Informacija koju posjeduje, omogućava mu da preciznije odredi vjerojatnost da njegov protivnik posjeduje 2 asa. Ta vjerojatnost iznosi 4/52*2/51, odnosno 0,3 %.

Ekvivalenta logika koristiti će se u signalnoj igri na način da će manje informirani igrač računati vjerojatnost igranja određenog poteza od strane bolje informiranog igrača uz uvjet da je priroda prethodno odredila tip tog igrača, dok će Harsanijevom transformacijom dinamična igra 2 s nepotpunim informacijama postati dinamična igra 3 igrača s potpunim, ali nesavršenim informacijama u kojoj će osim menadžera poduzeća i potencijalnog investitora sudjelovati i priroda u ulozi tržišta.

3.4. Određivanje toka igre

Kao što je opisano u prethodnom poglavlju, dinamična igra 2 igrača (menadžera poduzeća i potencijalnog investitora) s nepotpunim informacijama Harsanyijevom transformacijom razvila se u dinamičnu igru 3 igrača (menadžera poduzeća, potencijalnog investitora i tržišta u ulozi prirode) s nesavršenim informacijama.

Dakle u igri sudjeluju 3 igrača: tržište (priroda), menadžer poduzeća i potencijalni investitor, igrači svoje poteze vuku naizmjenično kroz 3 trenutka: *t = 1, t = 2, t = 3,* dok u posljednjem trenutku *t = 4* igrači primaju svoje isplate.

Ako se pretpostavi da je današnje stanje na tržištu određeno jučerašnjim stanjem, tok igre određuje se na način da u trenutku *t = 1* tržište (priroda) definira vrijednost imovine poduzeća (*a*) i čistu sadašnju vrijednost projekta (*b*). Nadalje, pretpostavlja se kako je vrijednost investicije (*I*) fiksna, određena prije trenutka *t = 1*, te poznata i menadžeru poduzeća i potencijalnom investitoru. U trenutku *t = 2* menadžer poduzeća, koji je ujedno i bolje informirani igrač (*Pošiljatelj*) promatra stanje na tržištu te određuje poruku i šalje signal potencijalnom investitoru. U trenutku *t = 3* potencijalni investitor, koji je ujedno i slabije informirani igrač (*Primatelj*) promatra signal i donosi odluku. Igra završava u trenutku *t = 4* u kojem igrači primaju svoje isplate.

3.5. Formalni zapis igre

Kao što je određeno u prijašnjem poglavlju igra se odvija kroz 4 trenutka.

Trenutak *t = 1:*

U trenutku početka igre (*t = 1*) priroda određuje tipove odnosno vrijednosti sadržane u tipovima: vrijednost ukupne imovine poduzeća (*a*) i neto sadašnju vrijednost investicije (*b*) sadržane u *Tipu 1* te vrijednost ukupne imovine poduzeća (*a*) i neto sadašnju vrijednost investicije (*b*) sadržane u *Tipu 2*.

Također, u istom trenutku priroda određuje i nalazi li se igra u *Tipu 1* ili *Tipu 2*.

Pretpostavlja se kako u *Pošiljateljevom* skupu postoje dvije vrijednosti poduzeća i dvije vrijednosti investicije. Dakle priroda može odrediti visoku vrijednost poduzeća i visoku vrijednost investicije, te nisku vrijednost poduzeća i nisku vrijednost investicije.

Formalni zapis je sljedeći:

Priroda određuje t_i iz *Pošiljateljevog* skupa

$T = \{t_1(a_1, b_1), t_2(a_2, b_2)\}$ prema distribuciji vjerojatnosti:

$p(t_i),\ p(t_i) > 0\ za\ svaki\ i\ te\ vrijedi\ p(t_1) + p(t_2) = 1.$

Vrijede sljedeće jednadžbe:

$$T = \{t_1, t_2\} \tag{8}$$

$$t_1 = (a_1, b_1) \tag{9}$$

$$t_2 = (a_2, b_2) \tag{10}$$

$$T = \{t_1(a_1, b_1), t_2(a_2, b_2)\} \tag{11}$$

$$t_i(a_i, b_i) = a_i + b_i \tag{12}$$

$$a_1 > a_2 \tag{13}$$

$$b_1 > b_2 \tag{14}$$

$$t_1 > t_2 \tag{15}$$

$$p(t_i),\ p(t_i) > 0\ za\ svaki\ i\ te\ vrijedi\ p(t_1) + p(t_2) = 1 \tag{16}$$

Vrijednosti sadržane u tipovima menadžeru poduzeća poznate su u trenutke *t = 1*, ali informacija o tome o kojem se tipu radi menadžeru poduzeća otkrivena je u trenutku *t = 2.* S druge strane, vrijednost ukupne imovine poduzeća i neto sadašnja vrijednost investicije oba tipa potencijalnom investitoru poznate su od početka igre (*t = 1*), ali informacija o tome koji je tip priroda odredila poznata je investitoru tek u trenutku isplate (*t = 4*). Kao što je ranije istaknuto, do asimetričnosti informacija dolazi radi dinamike otkrivanja informacija: menadžer poduzeća u trenutku *t = 2* saznaje o kojem se tipu radi, dok je potencijalnom investitoru ta informacija otkrivena tek u trenutku isplate (*t = 4*).

Jedna od razlika između Gibbonsovog modela signalne i načina na koji su postavljeni problem obradili Myers i Majluf leži i u pretpostavci da priroda određuje i vrijednost ukupne imovine poduzeća i čistu sadašnju vrijednost projekta. Naime, u Gibbonsovom modelu signalne igre vrijednost ukupne imovine poduzeća ne može biti odvojena od čiste sadašnje vrijednosti novog projekta, već se jedino može promatrati ukupna vrijednost poduzeća nakon ostvarene investicije. Nadalje, u Gibonnsovom modelu vrijednost poduzeća nakon što investitor odluči uložiti sredstva iznosi $a + b$, dok je u ovome radu ukupna vrijednost poduzeća nakon investiranja jednaka $a + b + I$ iz razloga što čista sadašnja vrijednost projekta u obzir uzima i sve rashode vezane uz sami projekt te je vrijednost investicije potrebno uključiti u ukupnu vrijednost poduzeća u obliku gotovog novca na računu. Nadalje, ovakva formulacija omogućuje da se u model ubaci pretpostavka kako poduzeće na računu već ima sredstva za financiranje projekta (ali ne dostatna) te posljedično tome varijaciju sredstava koja su potrebna od investitora.

Drugu razliku između radova, kao što je već istaknuto, čini i uvođenje alternativne stope povrata koja omogućava kreiranje kriterija na osnovu kojeg potencijalni investitor odlučuje o prihvaćanju odnosno odbijanju udjela ponuđenog od strane menadžera poduzeća.

<u>Trenutak *t = 2:*</u>

Formalni zapis trenutka je sljedeći:
Pošiljatelj (menadžer poduzeća) promatra t_i i onda određuje poruku s_i iz skupa
$S = \{s_1, s_2\}$.

S obzirom na to da je pretpostavljeno kako priroda određuje dvije vrijednosti (visoku i nisku), tako se i skup iz kojeg *Pošiljatelj* šalje poruku sastoji od dvije vrijednosti.
Vrijede sljedeće jednadžbe:

$$S = \{s_1, s_2\} \tag{17}$$

$$s_1 = s_1(a_1, b_1) \tag{18}$$

$$s_2 = s_2(a_2, b_2) \tag{19}$$

Nakon razmatranja vrijednosti imovine poduzeća i neto sadašnje vrijednosti investicije menadžer poduzeća, donosi odluku hoće li ponuditi udio u tvrtki potencijalnom investitoru ili ne, te koliko će iznositi udio koji je spreman ponuditi.

Kriterij na osnovu kojeg menadžer poduzeća, vodeći se logikom ekonomske isplativosti, donosi odluku je sljedeći:

$$a > (1 - s)(a + b + I) \tag{20}$$

Ako je sadašnja vrijednost ukupne imovine poduzeća veća od one vrijednosti poduzeća koju predstavlja ostatak od onoga što je ostalo nakon što se investitoru dao udio u poduzeće čija je vrijednost uvećana za neto sadašnju vrijednost investicije i potrebna novčana sredstva za ostvarivanje investicije, menadžer se neće odlučiti na emisiju obveznica (davanje udjela).

Jednadžba se može, radi jednostavnijeg utvrđivanja vrijednosti udjela prikazati na sljedeći način:

$$s > \frac{b + I}{a + b + I} \tag{21}$$

Jednadžba predstavlja kriterij kada se menadžer neće odlučiti na davanje udjela potencijalnom investitoru, dakle suprotan slučaj od navedenog je ujedno i slučaj u kojem će se menadžer poduzeća odlučiti na davanje udjela potencijalnom investitoru. Sljedeća jednadžba predstavlja takav slučaj:

$$s \leq \frac{b + I}{a + b + I} \tag{22}$$

Sve vrijednosti udjela koje su manje ili jednake udjelu zbroja čiste sadašnje vrijednosti projekta i vrijednosti zahtjevane investicije u zbroju čiste sadašnje vrijednosti projekta, vrijednosti investicije i ukupne vrijednosti imovine poduzeća su one vrijednosti koje odgovaraju interesu menadžera.

<u>Trenutak *t = 3:*</u>

Formalni zapis trenutka je sljedeći:

Primateljev skup akcija vrlo je jednostavan, on promatra s_i te onda onda odlučuje hoće li ponudu prihvatiti ili odbiti.

Također, kao i kod *Pošiljatelja,* potreban je kriterij na osnovu kojeg će *Primatelj,* nakon promatranja *Pošiljateljeve* poruke donijeti odluku o prihvaćanju ili odbijanju ponude.

Neka potencijalni investitor ima mogućnost ulaganja zahtijevanje vrijednosti investicije *I* u alternativni projekt s alternativnom stopom povrata na investiciju *r*. Potencijalni investitor prihvatiti će ponudu menadžera poduzeća u onom slučaju kada je vrijednost udjela kojeg će dobiti ulaganjem u poduzeće veća od vrijednosti alternativnog projekta ukamaćena za alternativnu stopu povrata na investicije *r*. Nejednadžba kriterija je sljedeća:

$$s(a + b + I) \geq I(1 + r) \tag{23}$$

Apsolutna vrijednost udjela kojeg je investitor spreman prihvatiti iznosi:

$$s \geq \frac{I(1 + r)}{(a + b + I)} \tag{24}$$

U trenutku $t = 3$ dolazi do asimetričnosti informacija, zato što potencijalni investitor ne zna koji je tip priroda odredila, zna samo da priroda može odrediti dva tipa (više i niže vrijednosti tvrtke i projekta) i vrijednosti sadržane u tim tipovima. U skladu sa zahtjevima signalne igre koji su ranije obrazloženi, on uklanja stratešku nesigurnost na način da vođen sekvencionalnom racionalnošću računa menadžerov kriterij te zaključuje o kojem tipu (t_1 ili t_2) se radi.

Također, još jedna od razlika između Gibbonsovog modela signalne igre i Myersovog i Majlufovog modela, je u načinu prepoznavanja signala kojeg menadžer poduzeća šalje. U Myersovom i Majlufovom modelu odluka o emisiji dionica ne govori investitoru ništa o tome koje vrijednosti su sadržane u tipu kojeg je priroda odredila. Naime, u njihovom modelu vjerovanja o tipu kojeg je priroda odredila su jednaka, odnosno vrijedi jednakost $p_1 = p_2$, što nije u skladu s trećim zahtjevom signalne igre koji kaže da vjerovanja, nakon promatranog signala moraju biti u skladu s Bayesovim pravilom.

Trenutak $t = 4$:

Dobro je zamijetiti kako kriteriji nisu brojevi već se radi o skupovima. Ako je udio izračunat pomoću investitorovog kriterija podskup udjela izračunatog pomoću menadžerovog kriterija doći će do emisije i raspodjele udjela:

$$\frac{b + I}{a + b + I} \geq \frac{I(1 + r)}{(a + b + I)} \tag{25}$$

Nadalje, ravnoteža signalne nije određena time hoće li do emisije doći ili neće. Ravnoteža signalne igre predstavlja kombinaciju strategija u kojoj je svaka odabrana strategija jednog igrača najbolji odgovor na odabrane strategija drugih igrača u igri. Odnosno u ovome primjeru, ravnoteža predstavlja kombinaciju strategija menadžera poduzeća i potencijalnog investitora takvu da ta kombinacija podrazumijeva najbolji strateški odgovor menadžera poduzeća na odabranu strategiju potencijalnog investitora, a ujedno i najbolji strateški odgovor potencijalnog investitora na odabranu strategiju menadžera poduzeća.

U skladu s ravnotežnim strategijama isplate igračima su sljedeće:

$$U_M(t_i, s_j, d_k) \tag{26}$$

$$U_I(t_i, s_j, d_k) \tag{27}$$

Funkcija isplata, kako menadžera poduzeća tako i potencijalnog investitora ovisiti će o tipu kojeg je priroda odredila (u kojem su sadržane vrijednost imovine poduzeća i neto sadašnja vrijednost novog projekta), visini udjela kojeg je menadžer poduzeća spreman ponuditi potencijalnom investitoru i prihvaćanju odnosno odbijanju ponuđenog udjela.

3.6. Numerički primjer ravnoteže razdvajanja i ravnoteže djelomičnog otkrivanja

Neka se pretpostavi kako je zahtijevana vrijednost investicije jednaka: $I = 150$. Nadalje, neka se pretpostavi kako kako je investitorova alternativna stopa povrata jednaka: $r = 10\%$. Zahtijevana vrijednost investicije, kao i investitorova alternativna stopa povrata dio su općeg znanja te su kroz cijelu igru poznati i menadžeru poduzeća i potencijalnom investitoru.

3.6.1. Ravnoteža razdvajanja

U tablici su prikazane vrijednosti pojedinog tipa kojeg je priroda odredila u trenutku $t = 1$. Iznosi su određeni u tisućama kuna:

Tablica 2: Vrijednosti tipa određenog od strane prirode u ravnoteži razdvajanja

	Tip 1	*Tip 2*
vrijednost ukupne imovine poduzeća	a = 200	a = 50
neto sadašnja vrijednost investicije	b = 50	b = 10

Izvor: Izrada autora

Tip 1

Neka je priroda u trenutku *t = 1* odredila *Tip 1*. U trenutku *t = 2* menadžer poduzeća promatra vrijednosti *Tipa 1*: *a = 200, b = 50*. Nakon promatranja vrijednosti ukupne imovine poduzeća i čiste sadašnje vrijednosti investicije, menadžer poduzeća pomoću formule računa udio u poduzeću koji je spreman ponuditi potencijalnom investitoru:

$$s \leq \frac{b+I}{a+b+I} \tag{28}$$

Udio u poduzeću koji je menadžer poduzeća spreman ponuditi potencijalnom investitoru manji je ili jednak od 0,5, odnosno 50%.

Investitor pomoću svog kriterija računa udio koji je spreman prihvatiti s obzirom na tip koji je priroda odredila (vrijednost ukupne imovine poduzeća i čistu sadašnju vrijednost projekta), vrijednost zahtjevane investicije i alternativnu stopu povrata:

$$s \geq \frac{I(1+r)}{(a+b+I)} \tag{29}$$

Udio u poduzeću koji je potencijalni investitor spreman prihvatiti od menadžera poduzeća veći je od 0.4125, odnosno 41.25%.

Razlika od 0.0875, odnosno 8,75% čini pregovarački prostor između menadžera poduzeća i potencijalnog investitora. Veličina pregovaračkog prostora osim o tipovima koje je priroda odredila te zahtijevanoj vrijednosti investicije, ovisi i o alternativnoj stopi povrata koju je investitor u stanju „pronaći“. Što je alternativna stopa povrata veća, to je udio koji je investitor spreman prihvatiti veći, a time i pregovarački prostor između investitora i menadžera manji. U slučaju kada bi investitorova alternativna stopa povrata iznosila 33.33%, pregovarački prostor ne bi postojao, menadžer poduzeća ponudio bi točno pola udjela (50%) a investitor bi, s obzirom na alternativnu stopu povrata od 33.33% prihvatio pola udjela (iako su povrati od obje investicije jednaki pretpostavlja se da je investitoru „jednostavnije“ provesti ovu investiciju nego onu koja nosi alternativnu stopu povrata).

Proces pregovaranja između menadžera poduzeća i potencijalnog investitora sam po sebi dovoljno je kompleksan te obujmom dovoljno veliki da bude tema zasebnog diplomskog rada. Stoga će se pretpostaviti kako je menadžer poduzeća nezasitan a signalna se igra rješava u skladu sa zahtjevima signalne igre (*zahtjev 2 Pošiljatelj*) te menadžer poduzeća maksimizira svoju korisnost tako da ponuđuje potencijalnom investitoru najmanji mogući udio (onaj najmanji koji je investitor spreman prihvatiti).

Dakle, u slučaju da priroda odredi *tip 1* menadžer poduzeća ponuditi će udio od 41.25% potencijalnom investitoru a potencijalni investitor će taj udio prihvatiti.

Tip 2

Neka je priroda u trenutku $t = 1$ odredila *Tip 2.* U trenutku $t = 2$ menadžer poduzeća promatra vrijednosti *Tipa 2*: $a = 50$, $b = 10$. Nakon promatranja vrijednosti ukupne imovine poduzeća i čiste sadašnje vrijednosti investicije, menadžer poduzeća spreman je ponuditi potencijalnom investitoru udio u poduzeću koja mora biti manji ili jednak od 0.7619, odnosno 76.19%.

Investitor, kao i kod *Tipa 1*, računa udio koji je spreman prihvatiti od menadžera poduzeća s obzirom na alternativnu stopu povrata r. Udio u poduzeću koji je potencijalni investitor spreman prihvatiti od menadžera poduzeća veći je ili jednak od 0.7857, odnosno 78.57%.

U slučaju kada priroda odredi *Tip 2* udio koji je menadžer poduzeća spreman ponuditi potencijalnom investitoru manji je od udjela koji je potencijalni investitor spreman prihvatiti od menadžera poduzeća te između njih neće doći do ostvarenja suradnje.

3.6.1.1 Određivanje optimalnih strategija

Strateški skup menadžera poduzeća sastoji se od dvije moguće visine udjela koje je on spreman, s obzirom na svoj kriterij, ponuditi potencijalnom investitoru. U slučaju da je priroda odredila *Tip 1* (t_1), odnosno visoke vrijednosti imovine poduzeća i čiste sadašnje vrijednosti projekta, menadžer poduzeća ponuditi će udio potencijalnom investitoru u visini od 41.25%, dok u slučaju da je priroda odredila *Tip 2* (t_2), menadžer poduzeća spreman je ponuditi potencijalnom investitoru udio u visini od 76.19%.

Dakle, vrijedi s_1 = 41.25% i s_2 = 76.19%.

S druge strane, strateški skup potencijalnog investitora sastoji se od dvije moguće akcije: prihvatiti ili odbiti ponudu. Za svaki tip koji je priroda odredila potencijalni investitor, s obzirom na svoju alternativnu stopu povrata od investicije, računa koji je onaj udio u poduzeću koji je spreman prihvatiti. U slučaju da je priroda odredila *Tip 1* (t_1), odnosno visoke vrijednosti imovine poduzeća i čiste sadašnje vrijednosti projekta, on je spreman prihvatiti udio veći ili jednak od 41.25%, dok je u slučaju da je priroda odredila *Tip 2*, on spreman prihvatiti udio veći ili jednak od 78.57%, odnosno ponuđeni udio od strane menadžera poduzeća neće prihvatiti.

Dakle, u slučaju da priroda odredi t_1 menadžer poduzeća igrati će s_1 dok u slučaju da priroda odredi t_2 menadžer poduzeća igrati će s_2. Bayesova ravnoteža signalne igre između biti menadžera poduzeća i potencijalnog investitora imati će ravnotežu razdvajanja (eng. *separating equilibrium*) iz razloga što je slabije informirani igrač uspio prepoznati signale (u obliku visine udjela) poslane od strane bolje informiranog igrača te uspio donijeti racionalnu odluku o prihvaćanju odnosno odbijanju ponuđenoga udjela.

„Razdvajanje tipova ishod je igara signaliziranja ili provjeravanja u kojima različiti tipovi primjenjuju različite strategije i dobivaju različite isplate tako da se temeljem promatranja njihovih poteza može zaključiti o kojem je tipu igrača zapravo riječ. Sukladno tome može se reći da je ravnoteža razdvajanja savršena Bayesova ravnoteža u igrama s asimetričnim informacijama u kojoj ravnotežni potezi otkrivaju tip igrača.“[31]

3.6.1.2 Isplate igračima

U slučaju da priroda odredi *Tip 1*, menadžer poduzeća, s obzirom na to da je uspio ostvariti suradnju s potencijalnim investitorom i pribaviti sredstva za financiranje novog projekta, krenuti će u realizaciju projekta. Ukupna vrijednost poduzeća nakon realizacije projekta iznositi će 400 tisuća kuna, od toga će 58.75%, odnosno 235 tisuće pripasti starim vlasnicima (isplata menadžeru poduzeća), dok će novim vlasnicima (potencijalnom investitoru) pripasti 41.25%, odnosno 165 tisuća kuna.

U slučaju da priroda odredi *Tip* 2 neće doći do realizacije novog projekta zato što neće doći do dogovora između menadžera poduzeća i potencijalnog investitora. Isplate će slučaju biti one vrijednosti imovine koje su menadžer poduzeća i potencijalni investitor posjedovali i prije početka igre.

3.6.2. Ravnoteža udruživanja

U tablici su prikazane vrijednosti pojedinog tipa, a iznosi su određeni u tisućama kuna:

Tablica 3: Vrijednosti tipa određene od strane prirode za ravnotežu udruživanja

[31] Kopal, R. i Korkut, D. (2014) *Uvod u teoriju igara*. Zagreb. Visoko učilište Effectus

	Tip 1	*Tip 2*
vrijednost ukupne imovine poduzeća	a = 240	a = 175
neto sadašnja vrijednost investicije	b = 50	b = 45

Izvor: *Izrada autora*

<u>*Tip 1*</u>

Neka je priroda u trenutku *t = 1* odredila *Tip 1.* U trenutku *t = 2* menadžer poduzeća promatra vrijednosti *Tipa 1*: *a = 200, b = 50*. Nakon promatranja vrijednosti ukupne imovine poduzeća i čiste sadašnje vrijednosti investicije, menadžer poduzeća spreman je ponuditi potencijalnom investitoru manji ili jednak od 0,5, odnosno 50%.

Udio u poduzeću koji je potencijalni investitor spreman prihvatiti od menadžera poduzeća s obzirom na svoju alternativnu stopu povrata veći ili jednak od 0.4125, odnosno 41.25%.

Dakle, u slučaju da priroda odredi *tip 1* menadžer poduzeća ponuditi će udio potencijalnom investitoru u visini od 41.25%, a potencijalni će investitor taj udio prihvatiti.

<u>*Tip 2*</u>

Neka je priroda u trenutku *t = 1* odredila *Tip 2.* U trenutku *t = 2* menadžer poduzeća promatra vrijednosti *Tipa 2*: *a = 175, b = 45*. Nakon promatranja vrijednosti ukupne imovine poduzeća i čiste sadašnje vrijednosti investicije, udio koji je menadžer poduzeća spreman ponuditi potencijalnom investitoru mora biti manji ili jednak od 0.5270, odnosno 52.7%.

Udio u poduzeću koji je potencijalni investitor, s obzirom na svoju alternativnu stopu povrata spreman prihvatiti od menadžera poduzeća veći je ili jednak od 0.4459, odnosno 44.59%.

3.6.2.1 Određivanje optimalnih strategija

Strateški skup potencijalnog investitora sastoji se od dvije moguće akcije: prihvatiti ili odbiti ponudu. Za svaki tip koji je priroda odredila potencijalni investitor, s obzirom na svoju alternativnu stopu povrata od investicije, računa koji je onaj udio u poduzeću koji je spreman prihvatiti. U slučaju da je priroda odredila *Tip 1* (t_1), odnosno visoke vrijednosti imovine poduzeća i čiste sadašnje vrijednosti projekta, on je spreman prihvatiti udio veći ili jednak od 41.25%, dok je u slučaju da je priroda odredila *Tip 2*, on spreman prihvatiti udio veći ili jednak od 44.59%.

S obzirom na vrijednosti ukupne imovine poduzeća i čiste sadašnje vrijednosti novog projekta sadržane u tipovima koje je priroda odredila signalna igra između menadžera poduzeća i potencijalnog investitora razlikuje se od one analizirane u prijašnjem poglavlju. Kao što je napomenuto, potencijalnom investitoru poznate su vrijednosti sadržane u oba tipa, međutim nije mu poznato koji je tip priroda odredila. Kako su mu poznate vrijednosti on može s ciljem prepoznavanja signala o kojem se tipu radi računati potencijalne udjele koje će mu ponuditi menadžer poduzeća. Jednako tako, menadžer poduzeća, osim što zna investitorovu alternativnu stopu povrata te na osnovu nje investitorov kriterij prihvaćanja odnosno odbijanja ponude, on zna i da investitor ponuđeni udio smatra signalom na osnovu kojeg zaključuje o kojem se tipu radi.

Dakle, strateški skup menadžera poduzeća vrlo je jednostavan. On će ne vezano za tip koji je priroda odredila odigrati s_2 = 44.59% jer na taj način signal koji šalje potencijalnom investitoru ne otkriva ništa o stvarnom stanju tipa kojeg je priroda odredila. Potencijalni investitor taj udio će prihvatiti i u trenutku isplate saznati o kojem se tipu stvarno radi.

Bayesova ravnoteža signalne igre između biti menadžera poduzeća i potencijalnog investitora imati će ravnotežu udruživanja (eng. *pooling equilibrium*) iz razloga što slabije informirani igrač nije u stanju prepoznati signale (u obliku visine udjela) poslane od strane bolje informiranog igrača.

„U određenim slučajevima jedan ili više tipova mogu uspješno oponašati poteze drugih tipova tako da manje informirani igrač ne može temeljem poteza razlučiti o kojem se tipu radi, niti može identificirati različite tipove. U takvim slučajevima govori se da se tipovi udružuju, a ravnoteža koja nastaje kao posljedica naziva se ravnotežom udruživanja (eng. *pooling equilibrium*).“[32]

3.6.2.2 Isplate igračima

U slučaju da priroda odredi *Tip 1*, menadžer poduzeća, s obzirom na to da je uspio ostvariti suradnju s potencijalnim investitorom i pribaviti sredstva za financiranje novog projekta, krenuti će u realizaciju projekta. Ukupna vrijednost poduzeća nakon realizacije projekta iznositi će 400 tisuća kuna, od toga će 55.41%, odnosno 221.62 tisuće pripasti starim

[32] Kopal, R. i Korkut, D. (2014) *Uvod u teoriju igara*. Zagreb. Visoko učilište Effectus

vlasnicima (isplata menadžeru poduzeća), dok će novom vlasniku (potencijalnom investitoru) pripasti 44.59%, odnosno 178.38 tisuća kuna.

Iako su vrijednost imovine poduzeća i čista sadašnja vrijednost projekta *Tipa 1* u ovome primjeru jednake kao i u prethodnome primjeru, isplate menadžera poduzeća i potencijalnog investitora su različite, odnosno u ovome je primjeru menadžer poduzeća prošao lošije nego u prethodnome iako su vrijednosti sadržane u *Tipu 1* ostale jednake. Razlika između tih dvaju isplata predstavlja cijenu signaliziranja koju menadžer poduzeća mora preuzeti na sebe kako bi potencijalnom investitoru prekrio saznanje o tipu kojeg je priroda odredila.

U slučaju da je priroda odredila *Tip 2* ukupna vrijednost poduzeća nakon realizacije projekta iznositi će 370 tisuća kuna. Starim vlasnicima pripasti će 55.51%, odnosno 205 tisuća kuna, dok će novom vlasniku pripasti 44.59%, odnosno 165 tisuća kuna.

3.7. Utjecaj gotovog novca na model

Četvrta pretpostavka modela podrazumijevala je kako se novi projekt može financirati gotovim novcem ili davanjem udjela u poduzeće. Nadalje, dodatno je pretpostavljeno kako poduzeće na raspolaganju nema gotovog novca. Vrijedila je jednadžba $I = E + S$ te dodatna pretpostavka $S = 0$.

Međutim, realno je za očekivati kako poduzeće na raspolaganju ima gotovog novca na računu, te kako je projekt samo djelomično potrebno financirati davanjem udjela u poduzeće.

Kako menadžer poduzeća od potencijalnog investitora nastoji pribaviti ostatak sredstava potrebnih za ispunjenje zahtijevane vrijednosti investicije te gotov novac na računu ne utječe na zahtijevanu vrijednost investicije, menadžerov kriterij ostati će nepromijenjen. U skladu s tim, gotov novac na računu direktno će utjecati na povećanje pregovaračke moći menadžera poduzeća na način da će smanjiti investitorov kriterij (zato što vrijedi I > E) prihvaćanja ponude.

Jednadžba redefiniranog investitorov kriterija je sljedeća:

$$s \geq \frac{E(1+r)}{(a+b+I)} \tag{30}$$

Smanjenje vrijednosti investitorovog kriterija utjecati će na ravnotežne strategije na način da će menadžeru poduzeće „povećati“ strateški prostor koji mu omogućava prikrivanje signala, odnosno veća je mogućnost kako će Bayesova ravnoteža igre ujedno biti i ravnoteža udruživanja.

Nadalje, samo smanjenje udjela kojeg je potencijalni investitor spreman prihvatiti od menadžera poduzeća znači i povećanje udjela koji ostaje prijašnjim vlasnicima poduzeća, čime se povećava i konačna vrijednost ravnotežnih isplata. U skladu s tim, menadžer poduzeća dio novog projekta može i financirati dugom, odnosno posuđenim novcem (u slučaju da na računu nema dovoljno gotovog novca a ne želi dati preveliki udio u poduzeću) i na kraju igre, u trenutku isplate platiti kamatu na posuđeni novac te i dalje biti u „plusu“ u odnosu na ravnotežnu isplatu nastalu igranjem strategije davanja većeg udjela u poduzeće.

3.8. Postojanje ravnoteže udruživanja

Postojanje ravnoteže udruživanja u signalnoj igri pošiljatelju omogućuje da uspješno prekrije signale o tome koji je tip odredila, odnosno ako igra ima ravnotežu udruživanja primatelj poruke nije u mogućnosti na osnovu odaslanog signala razaznati o kojem se tipu u igri radi.

Kako priroda može odrediti dva tipa, tako i menadžer poduzeća, odnosno potencijalni investitor mogu na osnovu tih dvaju tipova izračunati udjele koje su spremni ponuditi (u slučaju menadžera) odnosno prihvatiti (u slučaju investitora).

Neka menadžerovi i investitorovi udjeli mogu poprimiti visoke i niske vrijednosti, odnosno neka su menadžerovi i investitorovi udjeli visoki (eng. *high*) i niski (eng. *low*). Vrijede sljedeće jednadžbe:

$$s_H^M > s_L^M \tag{31}$$

$$s_H^I > s_L^I \tag{32}$$

Ravnoteža udruživanja postojati će onda kada je onaj manji udio koji je menadžer poduzeća spreman ponuditi potencijalnom investitoru veći od onog većeg udjela kojeg je potencijalni investitor spreman prihvatiti od menadžera poduzeća. S obzirom na pretpostavku o nezasitnosti, izračunati udjeli koje je menadžer poduzeća spreman ponuditi potencijalnom investitoru oni su najviši mogući koje je on spreman ponuditi, dok su s druge strane udjeli koje je potencijalni investitor spreman prihvatiti ujedno i najniži mogući koje je on spreman prihvatiti.

Dakle, uvjet postojanja ravnoteže udruživanja je sljedeći:

$$s_L^M \geq s_H^I \tag{33}$$

Nadalje, sukladno menadžerovom kriteriju, niske vrijednosti udjela koji je menadžer poduzeća spreman ponuditi potencijalnom investitoru nastati će za visoke vrijednosti imovine poduzeća i čiste sadašnje vrijednosti novog projekta sadržane u tipovima koje određuje priroda. Sukladno logici kriterija menadžera poduzeća, visoke vrijednosti udjela koje je potencijalni investitor spreman prihvatiti nastaju od niskih vrijednosti imovine poduzeća i čiste sadašnje vrijednosti projekta sadržane u tipovima koje određuje priroda.

Vrijedi dakle sljedeća nejednadžba:

$$\frac{b_H + I}{a_H + b_H + I} \geq \frac{I(1+r)}{a_L + b_L + I} \tag{34}$$

Kako su vrijednost imovine poduzeća, čista sadašnja vrijednost novog projekta, zahtijevana vrijednost investicije i alternativna stopa povrata dio općeg znanja, igrači (menadžer poduzeća i potencijalni investitor), mogu i prije početka same igre znati o kakvu će ravnotežu signalna igra imati, međutim to saznanje neće imati utjecati na sami ishod igre te na ravnotežne isplate.

Također, u igrama kojima priroda određuje više od dva tipa moguće je, uz postojanje ravnoteže udruživanja i ravnoteže razdvajanja, postojanje ravnoteže polurazdvajanja (eng. *semi-separating equilibrium*) i ravnoteže djelomičnog otkrivanja (eng. *partially revealing equilibrium*).

4. Zaključak

Cilj diplomskoga rada bio je pokazati kako se teorijom igara, granom matematike prisutnom u mikroekonomskim istraživanjima, te odgovarajućim matematičkim modelima mogu analizirati realne i svakidašnje poslovne situacije te smisleno i cjelovito obraditi razni problemi iz ekonomskih sfera. Definirajući ekonomsko ponašanje u širem smislu kao svaku stratešku interakciju između dva ili više sudionika s ciljem maksimiziranja vlastite korisnosti u uvjetima oskudnosti i učinkovitosti, teorija igara pruža formalni okvir unutar kojeg se mogu opisivati (analizirati) ekonomske pojave.

Metodološki dio rada započet je objašnjavanjem važnosti uvjeta oskudnosti i učinkovitosti te naglašavanjem uloge matematike u ekonomskim istraživanjima. Dio rada koji uključuje teoriju igara postavljen je na način da se prikazalo kako se igre mogu podijeliti u ovisnosti o tome jesu li potezi u igri istovremeni ili naizmjenični, te u ovisnosti o tome jesu li igrači u igri u potpunosti informirani ili dolazi do asimetričnosti informacija. U okviru tih istaknutih pitanja igre su se podijelile na statične i dinamične, odnosno igre s potpunim i igre s nepotpunim informacijama. Nadalje, s obzirom na različitu vrstu igre, rad je pokazao i kako je potrebno osnovni koncept rješenja (Nashova ravnoteža) dodatno „proširiti" kako bi taj „prošireniji" koncept rješenja kod složenijih igara, među koje spadaju i dinamične igre s nepotpunim informacijama, imao upravo ona svojstva ravnoteže koja ima Nashova ravnoteža kod jednostavnijih igara (statične igre s potpunim informacijama).

U tom duhu, u radu je istaknuto kako je temeljni problem svih dinamičnih igara vjerodostojnost odnosno mogućnost da igrač prijeti (iako neće ispuniti prijetnju) i daje neuvjerljiva obećanja. Kako Nashova ravnoteža podrazumijeva da ravnotežna strategija sadrži poteze koji su najbolji potezi (odgovori) u svim trenutcima u igri, ona ne može sadržavati poteze koji su odgovori na prijetnje koje se neće ostvariti. U dinamičnim igrama s potpunim informacijama igrač rješavajući igru povratnom indukcijom otklanja neuvjerljive prijetnje i obećanja na način da traži Nashovu ravnotežu svake podigre, odnosno procjenjuje na osnovu dostupnih informacija koje će se prijetnje i obećanja zaista i ostvariti, a s obzirom na to da se radi o s potpunim informacijama igrač može biti siguran u donesene procjene te pronaći ravnotežnu strategiju. Za razliku od dinamičnih igara s potpunim informacijama, u dinamičnim igrama s nepotpunim informacija ravnoteža se neće pronaći ako se igra rješava povratnom indukcijom. Razlog radi kojeg se ravnoteža neće pronaći jest u nedostupnosti svih informacija, odnosno igrač na osnovu informacija s kojima raspolaže ne može sa stopostotnom sigurnošću razlikovati neuvjerljive prijetnje i obećanja od onih uvjerljivih. Upravo dorada koncepta omogućila je igraču da pronađe ravnotežnu strategiju u skladu s posteriornim vjerovanjima o prijetnjama i obećanjima.

Dorada savršene Nashove ravnoteže podigre u savršenu Bayesovu ravnotežu u radu je prikazana putem zahtjeva signalne igre koji su podrazumijevali otklanjanje strateške nesigurnosti pridodavanjem vjerojatnosti za svaki tip koji je priroda odredila, određivanje vjerojatnosti Bayesovim pravilom te kreiranje ravnotežne strategije u skladu s posteriornim vjerojatnostima. Jednako tako, način uklanjanja strateške nesigurnosti kod dinamičnih igara s nepotpunim informacijama, te dorada koncepta savršene Nashove ravnoteže podigre u savršenu Bayesovu ravnotežu, jednak je doradi koncepta Nashove ravnoteže u Bayesovu ravnotežu kod statičnih igara s nepotpunim informacijama.

Nakon određivanja koncepta rješenja odnosno savršene Bayesove ravnoteže koja predstavlja skup strategija, po jednu za svakog igrača, takav da niti jedan igrač nema potrebu za mijenjanjem odabrane strategije, u radu se pristupilo definiranju samog problema, koji dolazi iz svakidašnjih poslovnih situacija a pomoću kojeg će se odgovarajućom analizom potvrditi iznesene teorijske postavke.

Centralni problem analize ovoga rada, odnosno situacija iz područja korporativnih financija, u kojoj menadžer poduzeća posjeduje informacije koje nisu dostupne vanjskim suradnicima, odnosno potencijalnim investitorima, uz određene pretpostavke modelirana je kao signalna igra. Signalna igra dinamična je igra s nepotpunim informacijama koja se Harsanyijevom transformacijom pretvorila u dinamičnu igru s potpunim ali nesavršenim, odnosno asimetričnim informacijama na način da je u igru uveden još jedan igrač, odnosno priroda koja određuje tipove ostalih igrača u igri čime se nepotpune informacije slabije informiranog igrača transformiraju u nesavršene informacije o potezu prirode. U radu priroda predstavlja tržište, a upravo je asimetričnost informacija temeljna pretpostavka modela: menadžer poduzeća bolje je informirani igrač i poznato mu je stanje na tržištu (tip koji je priroda odredila), dok je potencijalni investitor slabije informirani igrač i poznato mu je da postoje različita stanja u kojem se poduzeće može naći na tržištu (poznati tipovi koje priroda može odrediti) ali ne i u kojem se stanju poduzeće i nalazi na tržištu. Nadalje je pretpostavljeno kako poduzeće na tržištu može dosegnuti visoku vrijednosti ukupne imovine poduzeća i visoku vrijednost čiste sadašnje vrijednosti novog projekta, te nisku vrijednost ukupne imovine poduzeća i nisku čistu sadašnju vrijednost novog projekta. U skladu s tim, u radu je prikazano kako je upravo asimetričnost informacija i sam razlog za nazivanjem ovakve vrste dinamične igre signalnom igrom. Naime, s obzirom na to da potencijalni investitor koji je ujedno i slabije informirani igrač ima nesavršene informacije o potezu prirode, odnosno ne zna u kojem se stanju na tržištu poduzeće nalazi, on s posebnom pozornošću promatra potez menadžera poduzeća koji je ujedno i bolje informirani igrač, te promatrani potez interpretira kao signal koji mu daje informaciju o tome koji je tip priroda odredila.

Kao potvrda iznesenih teorijskih pretpostavki, u radu je pomoću numeričkog primjera pokazano postojanje dvaju ravnoteža koje se međusobno razlikuju upravo po tome je li odaslani signal od strane bolje informiranog igrača uspio sakriti od slabije informiranog igrača informaciju o tome koji je tip priroda odredila. U slučaju kada je Bayesova ravnoteža signalne igre ujedno i ravnoteža udruživanja, slabije informirani igrač neće biti u stanju prepoznati signal o tome koji je tip priroda odredila, dok će u slučaju kada je Bayesova ravnoteža signalne igre ujedno i ravnoteža razdvajanja, slabije informirani igrač biti u stanju na osnovu odaslanog signala prepoznati o kojem tipu se radi.

Dakle, u radu je prvo teorijski pretpostavljeno a zatim i numerički potvrđeno postojanje ravnoteže razdvajanja ili ravnoteže udruživanja kao jedne od dviju mogućih ravnoteža signalne igre između menadžera poduzeća i potencijalnog investitora.

Popis literature

1. Carmichael, F. (2005) *A Guide to Game Theory*. Financial Times/Prentice Hall; 1st edition
2. Dixit, A., Skeath, S. i Reiley, D.H. (2009) *Games of Strategy*. New York: W. W. Norton. 3rd edition (str. 211 povratna indukcija)
3. Gibbons, R. 1992, *Game theory for applied economists,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey
4. Hargreaves, P.S., Varoufakis, Y. (2003). *Game theory: A Critical Introduction*, Routledge, New York, NY.
5. Jakšić, M. (1998). *Paradoksi i zagonetke u ekonomiji*, I. izdanje, Ekonomski fakultet u Beogradu, Beograd.
6. John J. Hampton (1976), *Financial Decision Making, Concepts, Problems & Cases*, drugo izdanje, Reston Publishing Company, Reston, Virginia
7. Kopal, R. i Korkout, D. (2012) *Uvod u teoriju igara*, Visoko učilište Effectus – visoka škola za financije i pravo, Zagreb
8. Myers, S.C. i Majluf, N.S. (1984) *Corporate financing and investment decisions when firms have information that investors do not have.* MIT, Cambridge, USA
9. Orsag, S. (2003) *Vrijednosni papiri*. Sarajevo. Revicon
10. Osborne, M. J. i Rubinstein, A. (1994) *A Course in Game Theory.* Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, str. 1.
11. Pindyck, R.S., Rubinfeld, D.L. (2005), *Mikroekonomija,* Profil, Zagreb
12. Poundstone, W. (1992) Prisoner's Dilemma. New York: Doubleday
13. von Neumann, J. and Morgenstern, O., 1944. *Theory of games and economic behavior*. Princeton: Princeton University Press.
14. Pyle, D.H. i Leland, H.E. (1977) *Informational asymmetries, financial structure and financial intermediation.* The Journal of Finance, American Finance Association
15. Samuelson, P.A. i Nordhaus, W.D. (2010) *Ekonomija*. MATE d.o.o., Zagreb

Popis tablica